



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Национальный исследовательский  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# **ВСЕ ГРАНИ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**Сборник статей  
Всероссийской молодежной  
научной конференции**

**Томск, 12–15 мая 2020 г.**



ТОМСК  
«Издательство НТЛ»  
2020

УДК 51  
ББК 22  
В841

**В841 Все грани математики и механики:** сборник статей Всероссийской молодежной научной конференции (Томск, 12–15 мая 2020 г.) / под ред. Л.В. Гензе. – Томск: Изд-во НТЛ, 2020. – 140 с.

ISBN 978-5-89503-643-3

В сборнике представлены статьи, посвященные актуальным проблемам математики и механики, а также современным подходам и методам решения фундаментальных и прикладных задач. Для студентов, аспирантов, молодых ученых.

**УДК 51  
ББК 22**

#### **Организаторы:**

Национальный исследовательский Томский государственный университет; механико-математический факультет НИ ТГУ; Региональный научно-образовательный математический центр (НОМЦ) НИ ТГУ.

#### **Редакционная коллегия:**

Гензе Л.В., к.ф.-м.н., декан ММФ ТГУ; Старченко А.В., д.ф.-м.н., зав. кафедрой ВМиКМ ММФ ТГУ; Касымов Д.П., к.ф.-м.н., доцент ММФ ТГУ.

#### **Организационный комитет конференции:**

Касымов Д.П., председатель оргкомитета, к.ф.-м.н, доцент, зам. декана ММФ; Барт А.А., доцент ММФ, к.ф.-м.н.; Гурина Е.И., доцент ММФ, к.ф.-м.н.; Голубничий Е.Н., ответственный секретарь оргкомитета; Тараканова В.А., аспирантка ММФ; Мартынов П.С., аспирант ММФ; Бердалиева М.А., студентка ММФ; Орлов К.Е., студент ММФ.

ISBN 978-5-89503-643-3

© ООО «Издательство НТЛ», 2020

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Афанасьева А.А., Старченко А.В.</b> Численное решение прямой задачи электроимпедансной томографии .....	4
<b>Елфимова А.М., Тимошенко Е.А.</b> О линейных группах над кольцами .....	13
<b>Киреенко С.Г., Гриншпон Я.С.</b> Проектирование и реализация урока решения ключевых задач в профильной школе .....	21
<b>Клемешова А.И., Емельянова Т.Е.</b> Об обнаружении «разладки» .....	29
<b>Лещинский Д.В.</b> Математическое моделирование переноса примеси в уличном каньоне .....	37
<b>Матвиенко О.В., Промзелева Д.А., Базуев В.П., Черкасов И.С., Литвинова А.Е.</b> Математическое моделирование установившегося течения дилатантной жидкости Оствальда – де Вейля в цилиндрической трубе .....	46
<b>Повзун М.А., Пчелинцев Е.А.</b> Эффективное оценивание непараметрического сигнала на фоне шумов Орнштейна – Уленбека .....	56
<b>Сваровский А.И., Барт А.А., Старченко А.В.</b> Усвоение данных наблюдений при моделировании с помощью модели WRF .....	63
<b>Синишина Е.А., Гольдин В.Д.</b> Построение структурированных сеток .....	73
<b>Соколова Г.К.</b> Периодические функции нескольких действительных переменных: теория и приложения .....	89
<b>Чернова М.К., Тимошенко Е.А.</b> Перестановочные многочлены третьей и четвёртой степеней .....	99
<b>Степанова Е.А., Емельянова Т.В.</b> Об оценивании параметров регрессионной модели с семимартингалным шумом .....	109
<b>Хабарова Е.Л., Емельянова Т.В.</b> О численном исследовании свойств последовательной оценки параметров авторегрессии .....	114
<b>Хильчук М.Д., Тарасов Е.А.</b> Моделирование течения теплоносителя в системах охлаждения на примере течения охлаждающей жидкости в круглой цилиндрической трубе .....	125
<b>Шеметова В.В.</b> О применении специальной оператор-функции к построению фундаментальных решений абстрактных дифференциальных операторов .....	131

# Численное решение прямой задачи электроимпедансной томографии

А.А. Афанасьева, А.В. Старченко

*Национальный исследовательский  
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

На сегодняшний день метод электроимпедансной томографии (ЭИТ) активно развивается и является перспективным [1, 2]. Численная модель ЭИТ представляет собой краевую задачу для уравнения эллиптического типа в частных производных. Аналитическое решение находится с помощью рядов Фурье, а численное решение – с помощью метода конечных разностей на структурированной сетке и итерационного метода Якоби с точностью  $10^{-5}$ . Цель данной работы – найти численное решение прямой задачи ЭИТ [1] и в результате сравнения с аналитическим решением подобрать оптимальное распределение и плотность узлов конечно-разностной вычислительной сетки.

**Ключевые слова:** *электроимпедансная томография, разностная схема с переменным шагом, ряды Фурье.*

Электроимпедансная томография – это методика, позволяющая реконструировать внутреннее строение объектов живой природы через сечения, основываясь на измерении напряжения электрического тока, проходящего через сетку электродов, с последующим считыванием напряжения на границе.

## Общая постановка задачи ЭИТ

Дано уравнение переноса  $\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0$ , где  $\sigma$  – электрическая проводимость. На границе, контактирующей с воздухом, задается производная, равная нулю  $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0$ ,  $\Gamma \in \text{air}$ . На электродах  $E_i \in \Gamma$  рассматривают два вида полной электродной модели задания граничных условий [2].

Первый вид, когда известно напряжение  $U_i$  и полная электродная модель, выглядит следующим образом:

$$u + z_i \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = U_i.$$

Сила тока  $I_i$  вычисляется по следующей формуле:

$$I_i = \int_{E_i} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Второй вид, когда сила тока  $I_i$  известна и необходимо найти напряжение  $U_i$ , модель будет выглядеть следующим образом:

$$u + z_i \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{E_i} \left( \int_{E_i} u ds + z_i I_i \right),$$

где  $z_i$  – сопротивление электрода,  $\sigma \frac{\partial u}{\partial n}$  – плотность электрического тока.

Для решения этой задачи применяются как аналитические, так и численные методы. Аналитическое решение возможно лишь в наиболее простых случаях – при однородном распределении проводимости внутри области и несложной форме ее границы (например, окружность, прямоугольник и др.). Чем сильнее исследуемый объект отличается от идеального случая, тем выше погрешность аналитического решения. В ЭИТ более широкое применение нашли численные методы решения прямой задачи.

### Физическая постановка задачи

В модельной задаче предполагается, что исследуемый объект  $D$  находится в воздушной среде, имеет достаточно гладкую границу  $\Gamma$ . К объекту прикреплено 2 электрода (рис. 1). На границе задается плотность тока. Данная задача называется задачей Неймана.

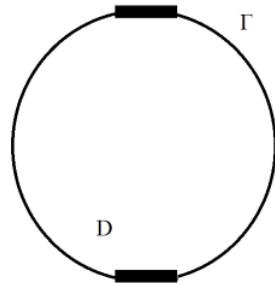


Рис. 1. Модельная задача

### Математическая постановка задачи

С учётом принятых условий математическая модель прямой задачи ЭИТ для двумерного случая (рис. 1) может быть представлена на краевой задаче

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0; \quad 0 < r < R; \quad 0 < \varphi < 2\pi;$$

$u = 0$  при  $r = 0$  – для единственного решения задачи Неймана.

На границе задается плотность тока

$$\frac{\partial u}{\partial n} = j(\varphi) \quad \text{при } r = R,$$

$$j(\varphi) = \begin{cases} 1, & \left| \varphi - \frac{\pi}{2} \right| \leq w, \\ -1, & \left| \varphi - \frac{3\pi}{2} \right| \leq w, \\ 0, & \left| \varphi - \frac{\pi}{2} \right| > w \text{ и } \left| \varphi - \frac{3\pi}{2} \right| > w. \end{cases}$$

### Точное аналитическое решение

Рассмотрим модель с двумя электродами полуширины  $w$ , прикрепленными к поверхности в точках  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ . Точное решение представленной выше задачи находится с помощью рядов Фурье в следующем виде:

$$u(r, \varphi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r^n}{n} \right) [C_n \cos(n\varphi) + S_n \sin(n\varphi)].$$

Определяем коэффициенты  $C_n$  и  $S_n$  с помощью граничных условий:

$$C_n = \frac{2(\sin(nw))}{\pi n} \left( \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right) \right),$$

$$S_n = \frac{2(\sin(nw))}{\pi n} \left( \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi n}{2}\right) \right).$$

Получаем решение в следующем виде:

$$u(r, \theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r^n}{n} \right) \left[ \frac{2\sin(nw)}{\pi n} \left( \cos\left(\frac{\pi n}{2} - n\varphi\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{2} - n\varphi\right) \right) \right].$$

Построим конечно-разностные схемы на сетках с переменным шагом по радиусу.

## Разностная схема на сетке с переменным шагом

Строим структурированную сетку с переменным шагом  $h_i = r_{i+1} - r_i$ ,  
 $i = \overline{0, Nr-1}$  :

$$\sum_{i=0}^{Nr-1} h_i = R .$$

Сетку будем выбирать с увеличивающимся от границы  $r = R$  шагом:

$$i = Nr - 1 \quad h_{Nr-1} = h$$

$$i = Nr - 2 \quad h_{Nr-2} = q * h, \quad q > 1 \quad \Rightarrow h = \frac{R(1-q)}{1-q^{Nr}},$$

$$i = Nr - 3 \quad h_{Nr-3} = q^2 * h \text{ и т.д.,}$$

где  $q$  – коэффициент отличия предыдущего шага от следующего  
 Разностная схема для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{1}{r_i} \frac{2}{h_i + h_{i-1}} \left( r_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_i} - r_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h_{i-1}} \right) +$$

$$+ \frac{1}{r_i^2} \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{h_\varphi^2} = 0 .$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = A \Rightarrow \frac{u_{Nrj} - u_{Nr-1j}}{h} = A, \quad A = j(\varphi_j); \quad r = 0: u_{0j} = 0.$$

## Разностная схема на сетке с преобразованием по радиусу

$\eta = \ln(R - r + \delta)$  – преобразование ,

$$\ln(R - \delta) \leq \eta \leq \ln \delta ,$$

$$h = \frac{\ln \delta - \ln(R - \delta)}{Nr},$$

$$\eta_i = \ln(R - \delta) + h * i, \quad i = \overline{0, Nr} .$$

Разностная схема имеет вид

$$\frac{e^{-\eta_i}}{r(\eta_i)} \frac{1}{h} \left( r \left( \eta_{i+\frac{1}{2}} \right) e^{-\eta_{i+\frac{1}{2}}} \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h} - r \left( \eta_{i-\frac{1}{2}} \right) e^{-\eta_{i-\frac{1}{2}}} \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h} \right) + \frac{1}{(r(\eta_i))^2} \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{h_\phi^2} = 0.$$

Граничные условия:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = A \Rightarrow e^{-\eta_{Nr}} \frac{u_{Nrj} - u_{Nr-1j}}{h} = A, A = j(\phi_j) ; r = 0: u_{0j} = 0$$

Построив конечно-разностные схемы, исследуем их свойства. Полученные разностные схемы аппроксимируют дифференциальную задачу с 1-м порядком по  $r$  и со 2-м порядком по  $\phi$ .

Разностные схемы являются устойчивыми. Это следует из применения мажоранты Гершгорина.

В первой разностной схеме, если  $q > 1$ , то шаг уменьшается при приближении к границе круга. Если  $q = 1$ , то это сетка с равномерным шагом.

Во второй разностной схеме шаг меняется логарифмически, и если  $\delta \gg 1$ , то сетка получается близкой к сетке с равномерным шагом. Чем  $\delta$  меньше, тем больше сгущается сетка к границе.

Полученные в результате аппроксимации разностные схемы решались методом Якоби с помощью параллельных директив технологии OpenMP на кластере ТГУ Cyberia. Оптимальный размер подобранной сетки: по радиусу  $(Nr) = 80$ , по углу  $(N\phi) = 640$ . Число итераций в методе Якоби выбиралось постоянным равным 80000. Количество итераций использовалось с запасом, так как чем больше размер сетки, тем хуже число обусловленности и метод Якоби медленнее сходится.

На рис. 2 продемонстрирован ход итерационного процесса. Из этого графика видно, что итерационный метод Якоби для разностной схемы 2 сходится быстрее, чем для разностной схемы 1.

На рис. 3 представлено сравнение результатов с аналитическим решением в сечении  $\phi = \pi/4$ . Из графиков видно, что каждое численное решение совпадает с аналитическим и на первый взгляд кажется, что графики для разностных схемы 1 и 2 совпадают друг с другом. Это не

так, если вычислить разность аналитического и численного решения, то мы увидим отклонение.

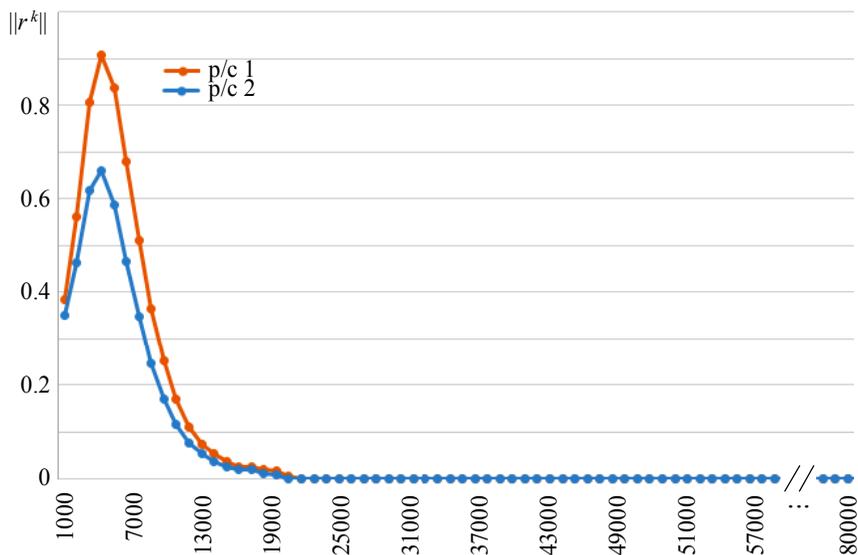


Рис. 2. Ход итерационного процесса,  $r^k$  – невязка

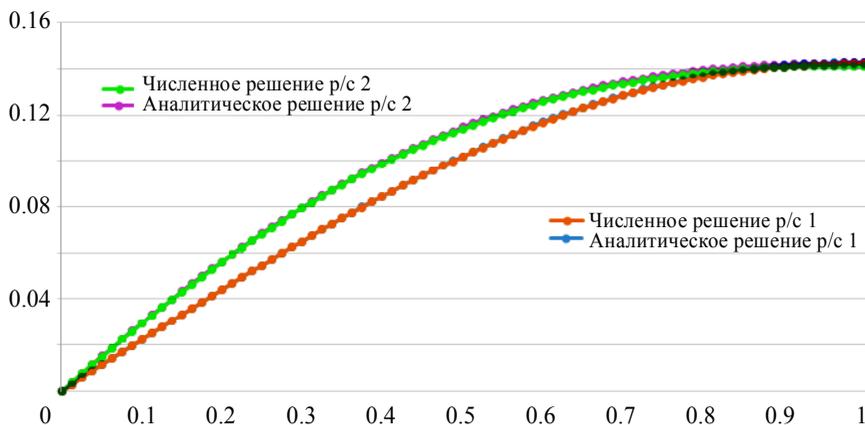


Рис. 3. Сравнение результатов с аналитическим решением в сечении  $\varphi = \pi/4$  для разностных схем 1 и 2

Из рис. 4 видно, что численное решение, полученное с помощью разностной схемы 1 ближе к аналитическому.

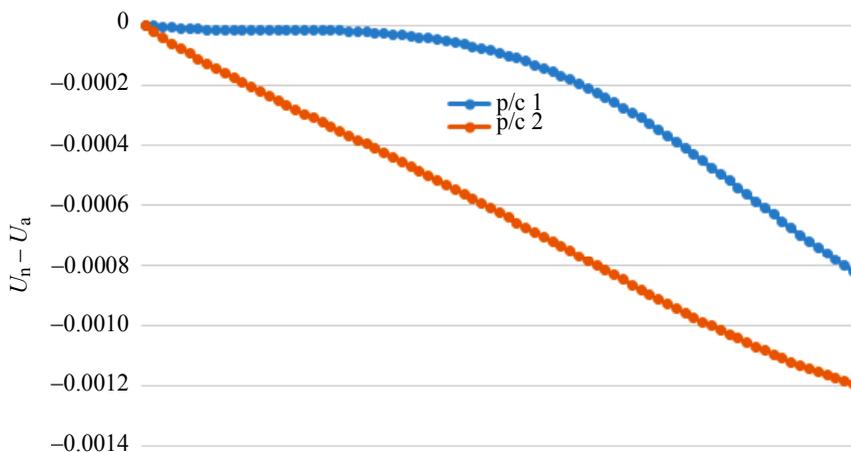


Рис. 4. Отклонение численных результатов от аналитического

Затем рассмотрим сравнение результатов с аналитическим решением в сечении  $\varphi = \pi/2$ . На рис. 5 заметна похожая ситуация, что графики совпадают, но из рис. 6 видно, что численное решение, полученное с помощью разностной схемы 2, ближе к аналитическому.

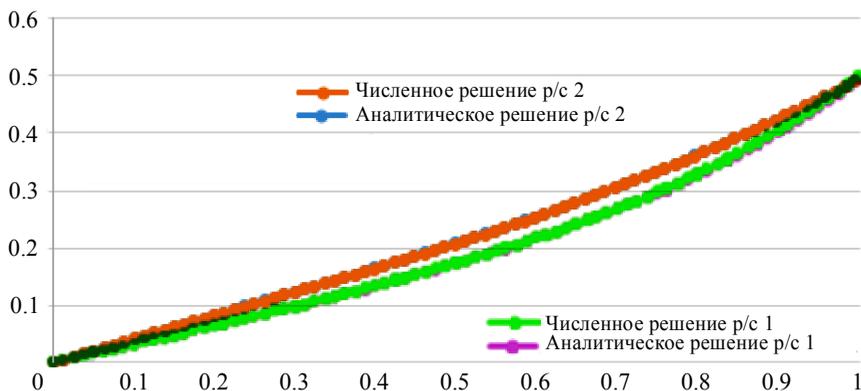


Рис. 5. Сравнение результатов с аналитическим решением  $\varphi = \pi/2$  для разностных схем 1 и 2

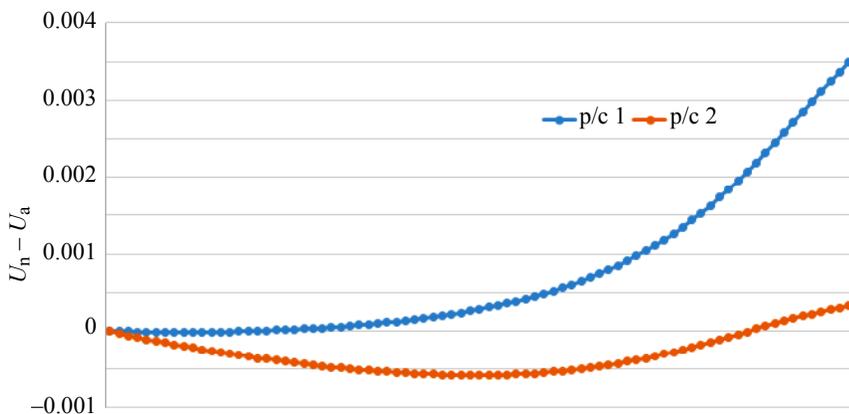


Рис. 6. Отклонение численных результатов от аналитического

Также можно сравнить результаты на границе. На рис. 7 продемонстрированы численные решения разностных схем 1 и 2, а также аналитическое решение. Из рисунка видно, что визуально эти решения совпадают. Если вычислить разность аналитического и численного решения, как показано на рис. 8, то замечаем, что численное решение, полученное с помощью разностной схемы 2, ближе к аналитическому.

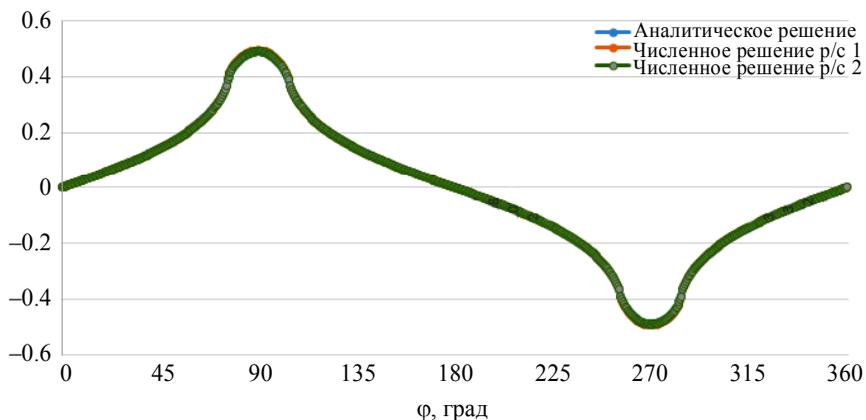


Рис. 7. Сравнение результатов с аналитическим решением на границе для разностных схем 1 и 2

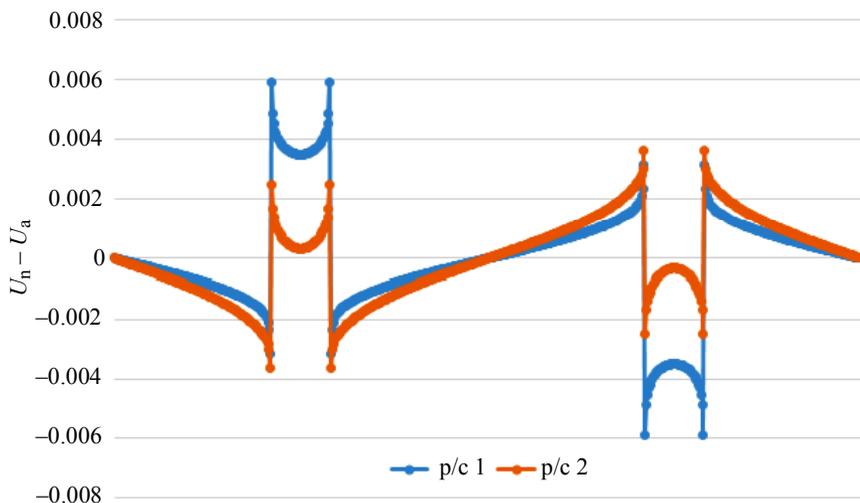


Рис. 8. Отклонение численных результатов от аналитического

Таким образом, в работе получено аналитическое решение для модели с заданной плотностью тока на границе с помощью рядов Фурье. Для численного решения модельной задачи построены 2 разностные схемы с разными способами сгущения к границе. Исследованы свойства полученных разностных схем. Разработана параллельная программа на C++, обеспечивающая ускорение в 4 раза за счет использования директив OpenMP. В результате вычислительного эксперимента для модельной задачи определились оптимальные параметры сеток для разностных схем: на электроде – несколько десятков ячеек, шаг вблизи электрода должен составлять не более 1% от размера области.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шерина Е.С., Старченко А.В. Численное моделирование задачи электроимпедансной томографии и исследование подхода на основе метода конечных объемов // Бюллетень сибирской медицины. 2014. Т. 13. № 4. С. 156–164.
2. Пеккер Я.С., Бразовский К.С., Усов В.Ю. и др. Электроимпедансная томография. Томск: НТЛ, 2004. 192 с.

**Афанасьева** Анна Александровна, магистрантка ТГУ; afanaseva\_ananyutka@inbox.ru

**Старченко** Александр Васильевич, д.ф.-м.н., проф., зав. кафедрой вычислительной математики и компьютерного моделирования ММФ ТГУ; starch@math.tsu.ru

# О линейных группах над кольцами\*

А.М. Елфимова, Е.А. Тимошенко

*Национальный исследовательский  
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Найдены «хорошие» порождающие множества для линейных групп  $SL_n$  и  $ML_n$  над евклидовым кольцом или факторкольцом  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ . Получены условия, при которых коммутанты групп  $SL_n$ ,  $ML_n$  и  $GL_n$  над указанными кольцами совпадают с группой  $SL_n$ .

**Ключевые слова:** матрица, евклидово кольцо, полная линейная группа, специальная линейная группа, трансвекция, инволюция, коммутант.

Линейные группы над полями играют важную роль при изучении операторов линейных пространств и достаточно хорошо исследованы. Гораздо меньше известно о линейных группах над кольцами, представляющих не меньший интерес в свете исследования групп автоморфизмов абелевых групп и модулей. В частности, при изучении групп автоморфизмов периодических и вполне разложимых абелевых групп важно знать, как устроены линейные группы над факторкольцами кольца  $\mathbb{Z}$  и над подкольцами поля  $\mathbb{Q}$ .

**Определение 1.** Кольцо с единицей  $R$ , не содержащее делителей нуля, называется *евклидовым*, если на множестве  $R \setminus \{0\}$  можно задать функцию  $e: R \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  таким образом, что для любых  $a, b \in R \setminus \{0\}$  выполняются следующие два условия:

- 1) если  $a$  делится на  $b$ , то  $e(a) \geq e(b)$ ;
- 2) существуют  $q, r \in R$ , такие, что  $a = qb + r$ , где  $r = 0$  или  $e(r) < e(b)$ .

Отметим, что все подкольца поля  $\mathbb{Q}$  евклидовы.

Всюду далее под  $R$  понимается либо некоторое евклидово кольцо, либо факторкольцо  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$  кольца целых чисел  $\mathbb{Z}$  ( $k > 1$ ). Заметим, что в кольце  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ , хоть оно в общем случае и не будет евклидовым, тоже можно ввести функцию, удовлетворяющую условию 2) из определения 1.

---

\* Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых учёных – докторов наук МД-108.2020.1.

Как обычно, через  $GL_n(R)$  мы обозначаем полную линейную группу (т.е. группу обратимых матриц порядка  $n$  над кольцом  $R$ ), а через  $SL_n(R)$  обозначаем специальную линейную группу (т.е. подгруппу группы  $GL_n(R)$ , состоящую из всех матриц с определителем 1).

**Определение 2.** Квадратная матрица, у которой:

- 1) на главной диагонали стоят единицы;
- 2) на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца ( $i \neq j$ ) стоит некоторый элемент  $a \in R$ ;
- 3) элементы, находящиеся вне главной диагонали не в позиции  $(i, j)$ , равны нулю,

обозначается через  $T_{ij}(a)$  и называется *транскекцией*.

Легко видеть, что операции вида

- (1) прибавление к  $j$ -му столбцу матрицы  $A$  её  $i$ -го столбца, домноженного на элемент  $a \in R$  ( $i \neq j$ );
- (2) прибавление к  $j$ -й строке матрицы  $A$  её  $i$ -й строки, домноженной на элемент  $a \in R$  ( $i \neq j$ )

фактически представляют собой

- (1') домножение матрицы  $A$  справа на матрицу  $T_{ij}(a)$ ;
- (2') домножение матрицы  $A$  слева на матрицу  $T_{ji}(a)$ .

**Теорема 1.** Из всякой принадлежащей  $SL_n(R)$  матрицы можно получить единичную матрицу преобразованиями вида (1) и (2).

*Доказательство.* Проведём индукцию по  $n$ .

Пусть  $n = 1$ . Ясно, что  $SL_1(R) = \{1\}$ , т.е. группа  $SL_n(R)$  состоит из одного элемента, который сам является единичной матрицей первого порядка.

Пусть для некоторого натурального  $k$  верно, что любая матрица из  $SL_k(R)$  приводится к единичной преобразованиями вида (1) и (2). Докажем, что тогда любую матрицу из  $SL_{k+1}(R)$  можно привести к единичной преобразованиями (1) и (2).

Пусть  $e$  – какая-то функция, обладающая свойством 2) из определения 1. Зафиксируем матрицу  $C \in SL_{k+1}(R)$ . Среди всех матриц, которые можно получить из  $C$ , применяя операции вида (1) и (2), выберем матрицу  $B = (b_{ij})$  с такими свойствами:

I. Число нулевых элементов в первой строке матрицы  $B$  является максимально возможным.

II. Наименьшее из значений функции  $e$ , принимаемых на множестве отличных от 0 элементов первой строки матрицы  $B$ , является минимально возможным (среди всех матриц, которые удовлетворяют условию I).

III. Тот элемент первой строки матрицы  $B$ , на котором функция  $e$  принимает минимальное значение, стоит как можно правее (среди всех матриц, удовлетворяющих условиям I и II).

Ясно, что в  $B$  не может быть нулевых строк. Пусть  $b_{1j}$  – тот из элементов первой строки, для которого значение функции  $e(b_{1j})$  минимально. Допустим, что в первой строке есть ещё хотя бы один ненулевой элемент  $b_{1i}$ . Найдутся  $q, r \in R$ , такие, что  $b_{1i} = qb_{1j} + r$  и либо  $r = 0$ , либо  $e(r) < e(b_{1j})$ . Если мы прибавим к  $i$ -му столбцу  $j$ -й, домноженный на  $-q$ , то получим матрицу, имеющую на пересечении  $i$ -го столбца и первой строки элемент  $r$ , что противоречит выбору матрицы  $B$ .

Таким образом, в первой строке матрицы  $B$  есть ровно один ненулевой элемент  $b_{1j}$ . Этот элемент обратим в  $R$ , так как определитель матрицы  $B$  равен единице и в то же время равен произведению элемента  $b_{1j}$  на его алгебраическое дополнение.

Допустим, что  $j < k + 1$ . Тогда, прибавив к  $(j + 1)$ -му столбцу матрицы  $B$  её  $j$ -й столбец, а затем прибавив к  $j$ -му столбцу  $(j + 1)$ -й, домноженный на  $-1$ , мы получим матрицу, в первой строке которой имеется ровно один ненулевой элемент, равный  $b_{1j}$  и стоящий в  $(j + 1)$ -м столбце, что противоречит выбору матрицы  $B$ .

Получили, что  $b_{1,k+1}$  – единственный ненулевой элемент первой строки матрицы  $B$ .

Прибавив к первому столбцу матрицы  $B$  её  $(k + 1)$ -й столбец, домноженный на  $(b_{1,k+1})^{-1}$ , мы получим матрицу, для которой элемент, стоящий на пересечении первой строки и первого столбца, равен 1. С помощью этой единицы обнулیم все остальные элементы первого столбца, а также последний элемент первой строки. Получится матрица  $D$  такого вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix},$$

где  $A = (a_{ij}) \in SL_k(R)$ . По предположению индукции матрицу  $A$  можно привести к единичной, используя операции (1) и (2). Значит, совершая операции вида (1) и (2) над подматрицей  $A$  матрицы  $D$ , мы сможем привести  $D$  к единичной матрице.

Таким образом, произвольную матрицу  $C \in SL_{k+1}(R)$  можно привести к единичной преобразованиями (1) и (2).

Индукция завершена. ■

**Теорема 2.** Для всякого натурального числа  $n$  группа  $SL_n(R)$  порождается множеством всех трансвекций этой группы.

*Доказательство.* Пусть  $A$  – произвольная матрица из  $SL_n(R)$ . Будем обозначать единичную матрицу через  $E$ .

Ввиду теоремы 1 матрицу  $A$  можно привести к единичной преобразованиями вида (1) и (2). А так как преобразования вида (1) и (2) представляют собой соответственно преобразования (1') и (2'), то верно равенство

$$X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_m \cdot A \cdot Y_1 \cdot Y_2 \cdot \dots \cdot Y_s = E,$$

где  $X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_s$  – трансвекции группы  $SL_n(R)$ .

Легко видеть, что  $T_{ij}(a)T_{ij}(-a) = E$ . Поэтому матрицу  $A$  можно записать как произведение трансвекций группы  $SL_n(R)$ :

$$A = X_m^{-1} \cdot X_{m-1}^{-1} \cdot \dots \cdot X_1^{-1} \cdot Y_s^{-1} \cdot Y_{s-1}^{-1} \cdot \dots \cdot Y_1^{-1}.$$

Таким образом, группа  $SL_n(R)$  порождается множеством всех трансвекций этой группы. ■

**Следствие 1.** Если  $R = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ , то специальная линейная группа  $SL_n(R)$  порождается множеством трансвекций вида  $T_{ij}(1)$ .

*Доказательство.* Для элемента  $a = x + k\mathbb{Z} \in R$ , где  $0 \leq x < k$ , можно представить трансвекцию  $T_{ij}(a)$  в виде

$$T_{ij}(a) = (T_{ij}(1))^x.$$

Поэтому любую матрицу из  $SL_n(R)$  можно представить в виде произведения трансвекций вида  $T_{ij}(1)$ . ■

**Определение 3.** Матрица  $A \in GL_n(R)$  называется *инволюцией*, если  $A^2$  совпадает с единичной матрицей.

Через  $ML_n(R)$  мы обозначим подгруппу группы  $GL_n(R)$ , состоящую из всех матриц с определителем  $\pm 1$ .

**Теорема 3.** Если кольцо  $R$  евклидово, то для любого  $n$  группа  $ML_n(R)$  порождается множеством инволюций группы  $GL_n(R)$ .

*Доказательство.* Достаточно будет рассмотреть случай  $n > 1$ . Согласно теореме 2 группа  $SL_n(R)$  порождается множеством трансвекций этой группы. Покажем, что каждая трансвекция представима в виде произведения инволюций группы  $GL_n(R)$ .

Обозначим через  $P_{ij}(a)$ , где  $i \neq j$ , квадратную матрицу порядка  $n$ , у которой:

- 1) в позиции  $(i, j)$  стоит элемент  $a \in R$ ;
- 2) элемент, находящийся в позиции  $(i, i)$ , равен  $-1$ , а остальные элементы на главной диагонали равны 1;
- 3) элементы, находящиеся вне главной диагонали не в позиции  $(i, j)$ , равны нулю.

Ясно, что матрицы вида  $P_{ij}(a)$  являются инволюциями группы  $GL_n(R)$  и  $T_{ij}(a) = P_{ij}(a)P_{ij}(0)$ . Поэтому всякая матрица из  $SL_n(R)$  представима в виде произведения инволюций.

Пусть  $A \in ML_n(R) \setminus SL_n(R)$ ; положим  $B = AP_{12}(0)$ . Так как  $|B| = |A| \cdot |P_{12}(0)| = (-1)^2 = 1$ , то  $B \in SL_n(R)$ . Значит, мы можем записать матрицу  $B$  в виде произведения инволюций группы  $GL_n(R)$ . Так как  $A = B(P_{12}(0))^{-1} = BP_{12}(0)$ , то матрица  $A$  представима в виде произведения инволюций группы  $GL_n(R)$ .

Итак, всякая матрица из  $ML_n(R)$  представима в виде произведения инволюций группы  $GL_n(R)$ . Так как инволюции имеют определитель, равный 1 или  $-1$ , то всякое произведение инволюций будет иметь определитель 1 или  $-1$ . Таким образом,  $ML_n(R)$  содержит группу, поро-

ждаемую множеством всех инволюций группы  $GL_n(R)$ , и, значит, совпадает с этой группой. ■

Напомним, что *коммутатор* элементов  $x$  и  $y$  группы  $G$  – это элемент  $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ . Подгруппа группы  $G$ , которая порождается множеством всех коммутаторов данной группы, называется её *коммутантом*.

Заметим, что коммутатор двух матриц из  $GL_n(R)$  имеет единичный определитель, поэтому коммутанты групп  $SL_n(R)$ ,  $ML_n(R)$  и  $GL_n(R)$  всегда содержатся в  $SL_n(R)$ .

**Теорема 4.** Пусть выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $n > 2$ ;
- 2)  $n = 2$  и  $6R = R$ .

Тогда коммутанты каждой из групп  $SL_n(R)$ ,  $ML_n(R)$ ,  $GL_n(R)$  совпадают с  $SL_n(R)$ .

*Доказательство.* 1) Заметим, что всякая трансвекция является коммутатором некоторых матриц из  $SL_n(R)$ . Действительно,

$$T_{ij}(a) = [T_{im}(a), T_{mj}(1)],$$

где  $m \neq i$ ,  $m \neq j$ ,  $a \in R$ . Тогда в силу теоремы 2 коммутанты групп  $SL_n(R)$ ,  $ML_n(R)$  и  $GL_n(R)$  содержат в себе  $SL_n(R)$ , что и требовалось.

- 2) Пусть  $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2a}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , где  $a \in R$ . Легко убедиться,

что  $A, B \in SL_2(R)$  и  $[A, B] = T_{21}(a)$ . Точно так же можно проверить, что всякая трансвекция вида  $T_{21}(a)$  является коммутатором подходящих матриц из  $SL_2(R)$ . В силу теоремы 2 отсюда следует требуемое утверждение. ■

**Предложение 1.** Если  $2R = R$ , то коммутанты групп  $ML_2(R)$  и  $GL_2(R)$  совпадают с  $SL_2(R)$ .

*Доказательство.* Как и в доказательстве случая 2) из теоремы 4, достаточно будет указать для произвольного  $a \in R$  матрицы из

$ML_2(R)$ , коммутатор которых равен  $T_{12}(a)$ . Действительно, если  $A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , то  $[A, B] = T_{12}(a)$ . ■

**Теорема 5.** Пусть  $R$  – подкольцо поля рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  или факторкольцо вида  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ . Если  $2R \neq R$ , то коммутант группы  $GL_2(R)$  является собственной подгруппой группы  $SL_2(R)$ .

*Доказательство.* Непосредственно проверяется, что  $SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  состоит из шести элементов, а коммутант группы  $GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  состоит из трёх элементов. В частности, матрица

$$T = \begin{pmatrix} 1+2\mathbb{Z} & 1+2\mathbb{Z} \\ 0+2\mathbb{Z} & 1+2\mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

принадлежит группе  $SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , но не принадлежит коммутанту группы  $GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

Пусть  $\pi$  – канонический гомоморфизм  $R \rightarrow R/2R$ . Легко видеть, что образ этого гомоморфизма изоморфен  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , т.е. совпадает с полем  $\{0+2R, 1+2R\}$ . Для удобства мы будем отождествлять образ  $\pi$  с полем  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Для всякой  $(2 \times 2)$ -матрицы  $A = (a_{ij})$  с элементами из  $R$  через  $\rho(A)$  обозначим  $(2 \times 2)$ -матрицу  $(\pi(a_{ij}))$  с элементами из  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Легко убедиться, что если  $X, Y \in GL_2(R)$  и  $A = [X, Y]$ , то  $\rho(A) = [\rho(X), \rho(Y)]$ , причём  $\rho(X), \rho(Y) \in GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

Покажем, что матрица  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  из группы  $SL_2(R)$  не принадлежит коммутанту группы  $GL_2(R)$ . Если это не так, то найдутся коммутаторы  $A_1, \dots, A_s$  матриц из  $GL_2(R)$  такие, что  $B = A_1 \cdot \dots \cdot A_s$ . Тогда матрица

$$T = \rho(B) = \rho(A_1 \cdot \dots \cdot A_s) = \rho(A_1) \cdot \dots \cdot \rho(A_s)$$

принадлежит коммутанту группы  $GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  – противоречие. Значит,  $B$  не принадлежит коммутанту группы  $GL_2(R)$  и этот коммутант есть собственная подгруппа группы  $SL_2(R)$ . ■

**Теорема 6.** Пусть  $R$  – подкольцо поля  $\mathbb{Q}$  или факторкольцо вида  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ . Если  $3R \neq R$ , то коммутант группы  $SL_2(R)$  является собственной подгруппой этой группы.

**Доказательство.** Непосредственно проверяется, что  $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$  состоит из 24 элементов, а коммутант группы  $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$  – из 8 элементов.

Нетрудно видеть, что образ канонического гомоморфизма  $R \rightarrow R/3R$  будет изоморфен полю  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Как и в доказательстве теоремы 5, из того, что  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  служит гомоморфным образом кольца  $R$ , можно вывести, что коммутант группы  $SL_2(R)$  есть собственная подгруппа этой группы. В роли матрицы  $B$  можно использовать ту же матрицу, что и в доказательстве теоремы 5, а в роли  $T$  – матрицу  $\begin{pmatrix} 1+3\mathbb{Z} & 1+3\mathbb{Z} \\ 0+3\mathbb{Z} & 1+3\mathbb{Z} \end{pmatrix}$  из  $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ . ■

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гайдак В.А., Тимошенко Е.А.* Инволюции полной линейной группы  $GL_2$  над подкольцом поля  $\mathbb{Q}$  // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 62. С. 19–26.

---

**Елфимова** Анастасия Максимовна, студентка ТГУ; elfimova.nastya@bk.ru

**Тимошенко** Егор Александрович, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры алгебры ММФ ТГУ; tea471@mail.tsu.ru

# Проектирование и реализация урока решения ключевых задач в профильной школе

С.Г. Киреенко, Я.С. Гриншпон

*Национальный исследовательский  
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Показано применение в школьной практике метода ключевых задач, основанного на принципе: каждая задача системы использует прием или результат решения какой-либо одной (ключевой) задачи. Речь идет о разных подходах к понятию ключевой задачи, приводятся алгоритм подготовки урока решения ключевых задач и критерии отбора таких задач. В качестве примера рассматривается подборка задач для классов физико-математического профиля по теме «Метод оценки при решении тригонометрических уравнений». В завершение даются рекомендации поэтапного использования метода ключевых задач.

**Ключевые слова:** *урок ключевых задач, метод оценки, тригонометрические уравнения.*

Обучение математике – это, прежде всего, обучение решению задач. Учитель не должен добиваться, чтобы школьники решали как можно больше однотипных задач. Решение большинства довольно трудных задач даже на математических олимпиадах сводится в конечном итоге к умелому распознаванию небольшого числа идей, отраженных в ключевых задачах. Многие задачи, опубликованные в учебниках, задачниках, методических пособиях, в значительной степени дублируют друг друга, отличаясь лишь обозначениями или другими не очень существенными деталями, тогда как математическая их сущность одна и та же. Кроме того, в ряде учебников отсутствуют задачи, методы решения которых уникальны, отличны от применяемых в других задачах и достаточно часто востребованы на олимпиадах, ЕГЭ и других испытаниях. Таким образом, по каждой теме достаточно выделить несколько, обычно не более 6–7 «ключевых задач», почти все остальные можно свести к одной из них или их композиции.

Какие же задачи следует считать ключевыми? Существует две точки зрения о *понятии ключевой задачи* [1]. Первая из них состоит в рассмотрении ключевой задачи как задачи-факта. Часто такая задача оказывается дополнительной теоремой школьного курса. Примером может

служить следующая задача: «Докажите, что медиана в прямоугольном треугольнике, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы». Вторая точка зрения состоит в рассмотрении ключевой задачи как задачи-метода. Например: «Известно, что  $ABCD$  – трапеция,  $AD = 2BC$ ,  $AD$ ,  $BC$  – основания. Точка  $M$  такова, что углы  $ABM$  и  $MCD$  прямые. Доказать, что  $MA = MD$ » (ЕГЭ 2017, [2]). Ключевым приемом решения подобной задачи является продление боковых сторон трапеции и построение ее до треугольника.

Урок решения ключевых задач – это урок построения новых знаний. Его содержательная цель – построение теоретических основ методических линий, а деятельностная цель – формирование у учащихся способности к структурированию и систематизации изучаемого предметного содержания.

Рассмотрим *примерный алгоритм подготовки урока решения ключевых задач*:

1. Изучение программы и определение умений, которые должны быть сформированы у учащихся после изучения темы.
2. Систематизация методов решения задач по теме.
3. Отбор ключевых задач по изучаемой теме.
4. Выбор методов решения ключевых задач.
5. Изучение затруднений и возможных ошибок учащихся при реализации отобранных алгоритмов, способы их предупреждения.
6. Обоснование последовательности разбора ключевых задач с учащимися.
7. Планирование проведения урока.

*Критерии отбора ключевых задач:*

1. Соответствие программе по данной теме.
2. Степень использования при изучении последующих тем.
3. Временные затраты на обучение учащихся.
4. Оптимальность алгоритмов решения задач.
5. «Красота» применяемых методов как способ повышения мотивации к обучению.

Кроме того, при отборе ключевых задач можно опираться на *метод исключения и дополнения*. Для его реализации обращаемся к задачам учебника. Рассматриваем первую задачу – она первый кандидат на попадание в список ключевых задач. Переходим ко второй задаче. Здесь возникают варианты. Если она аналогична первой, то выбираем одну из двух задач. Если же она существенно отличается от первой и не включает ее, то добавляем вторую задачу к первой. Если же вторая задача

отличается от первой, но включает в себя первую, то чаще всего первую задачу следует исключить, а вторую включить в число возможных кандидатов. И так далее.

Приведем в качестве примера набор ключевых задач по теме «Метод оценки при решении тригонометрических уравнений».

**Задача 1.** Решите уравнение

$${}^{2020}\sqrt{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}} + {}^{2020}\sqrt{\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0.$$

*Решение.* В левой части уравнения сумма неотрицательных выражений, а она равна нулю тогда и только тогда, когда оба слагаемых одновременно равны нулю. Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ рис. 1} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

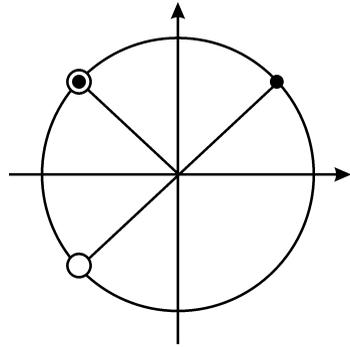


Рис. 1

**Задача 2.** Решите уравнение  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = x^2 + 1.$

*Решение.* ОДЗ:  $x \neq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Исходное уравнение на ОДЗ равносильно уравнению

$$\cos x = x^2 + 1.$$

Поскольку  $\cos x \leq 1$ , а  $x^2 + 1 \geq 1$ , то получаем равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 0 = 1 \text{ (верно)}, \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

*Ответ:*  $x = 0.$

**Задача 3.** Решите уравнение  $\sin 2x - \sin 6x + 2 = 0$ .

*Решение.* Перепишем уравнение в виде

$$\sin 2x + (-\sin 6x) = -2.$$

Поскольку  $\sin 2x \geq -1$  и  $-\sin 6x \geq -1$ , исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 2x = -1, \\ -\sin 6x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Найдем пересечение серий решений уравнений на единичной окружности (рис. 2). Получим

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

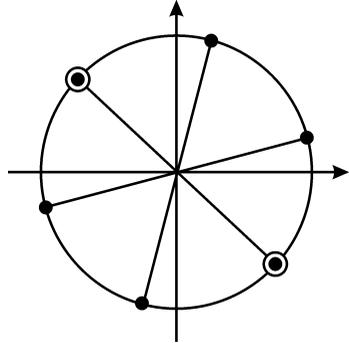


Рис. 2

**Задача 4.** Решите уравнение  $\cos x \cdot \cos 3x = 1$ .

*Решение.* Каждый множитель в левой части уравнения  $\cos x \cdot \cos 3x = 1$  по модулю не превосходит 1. Поэтому произведение таких множителей может равняться 1 тогда и только тогда, когда выполняется следующая совокупность:

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 3x = 1, \\ \cos x = -1, \\ \cos 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

**Задача 5.** Решите уравнение

$$\left( \cos \frac{x}{4} - 3 \sin x \right) \sin x + \left( 2 + \sin \frac{x}{4} - 2 \cos x \right) \cos x = 0.$$

*Решение.* Раскроем скобки и применим тригонометрические формулы. Тогда уравнение преобразуется к виду

$$\sin \frac{5x}{4} + 2 \cos x = 3.$$

Оценивая каждое слагаемое в левой части уравнения, делаем вывод, что исходное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \sin \frac{5x}{4} = 1, \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5}, n \in Z, \\ x = 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Найдем пересечение серий решений уравнений:

$$\frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5} = 2\pi k,$$

$$4n = 5k - 1, n, k \in Z.$$

Равенство выполняется, если  $k = 1 + 4l, l \in Z$ . Тогда  $x = 2\pi + 8\pi l, l \in Z$ .

*Ответ:*  $x = 2\pi + 8\pi l, l \in Z$ .

**Примечание.** В задаче 5 оценка, приводящая к системе уравнений, аналогична используемой в задаче 3. Но способы нахождения общих решений системы в этих задачах различны. Применение тригонометрической окружности в этом примере затруднительно, так как период уравнения равен  $8\pi$ . Поэтому такую задачу тоже следует включить в список ключевых по данной теме.

**Задача 6.** Решите уравнение  $3\sin x + 4\cos x = 5$ .

*Решение.* Введем векторы  $\vec{a} \{3; 4\}$ ,  $\vec{b} \{\sin x; \cos x\}$  и рассмотрим их скалярное произведение

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 1 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \vec{b}. \end{aligned}$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{\sin x}{3} = \frac{\cos x}{4},$$

причем  $\sin x > 0, \cos x > 0$ , т.е.  $x \in I$  четверти.

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{4} \text{ и } x = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

*Ответ:*  $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + 2\pi n, n \in Z$ .

**Задача 7.** Решите уравнение  $\sin^6 x + \cos^3 x = 1$ .

*Решение.* Оценим левую часть уравнения:

$$\sin^6 x \leq \sin^2 x, \quad \cos^3 x \leq \cos^2 x.$$

Тогда  $\sin^6 x + \cos^3 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . С учетом оценки получаем

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^3 x = 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^6 x = \sin^2 x, \\ \cos^3 x = \cos^2 x \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm 1, \\ \sin x = 0, \\ \cos x = 0, \\ \cos x = 1, \end{cases} &\text{рис. 3} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \end{cases} &n \in Z. \end{aligned}$$

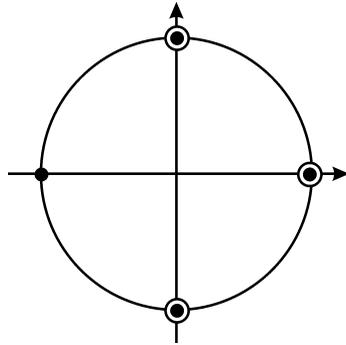


Рис. 3

*Ответ:*  $x = 2\pi n, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ .

**Задача 8.** Решите уравнение  $1 + \cos^2 x + 2 \cos x \cos^2 5x = \sin^2 5x$ .

*Решение.* Преобразуем уравнение к виду

$$D_1 = \cos^4 5x - \cos^2 5x = \cos^2 5x(\cos^2 5x - 1) \leq 0.$$

Уравнение может иметь корни, только если  $D_1 = 0$ , т.е.

$$\begin{cases} \cos 5x = 0, \\ \cos 5x = \pm 1, \end{cases}$$

тогда

$$\begin{cases} \cos 5x = 0, \\ \cos 5x = \pm 1, \\ \cos x = -\cos^2 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 5x = 0, \\ \cos x = 0, \\ \cos 5x = \pm 1, \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = \pi + 2\pi n, \end{cases} \quad n \in Z.$$

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ .

**Задача 9.** При каких  $a$  уравнение  $\sin^4 x + \cos^4 x = a$  имеет корни?

*Решение.* Оценим левую часть уравнения. Для этого проведем некоторые преобразования:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = a,$$

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = a,$$

$$0 \leq \sin^2 2x \leq 1,$$

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \leq 1.$$

Уравнение имеет корни, если параметр принимает значения, входящие во множество значений левой части уравнения:

$$a \in \left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$$

*Ответ:*  $a \in \left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$ .

Заметим, что в школьных учебниках редко встречаются задачи на применение метода оценки, поэтому данная подборка может оказаться полезной учителям при планировании уроков.

Подводя итог, сформулируем *основные элементы* использования метода ключевых задач:

1. По каждой теме курса можно выделить несколько ключевых задач таким образом, что почти все остальные задачи сводятся к одной из них или к комбинации нескольких.

2. Все задачи разбираются и записываются на уроке в виде опорного конспекта, справочника.

3. Система задач, предложенная учителем, может дополняться учащимися.

4. Работа по отбору ключевых задач ведется непрерывно, система дополняется новыми задачами, выделенными при решении более сложных задач.

5. Обязателен тренинг по распознаванию и применению системы «ключей».

6. Применение полученных знаний целесообразно завершить зачетом.

Навыки и умения, полученные детьми при выделении и решении непосредственно ключевых, а также комбинированных задач, создают прочную базу для дальнейшего изучения предмета на более углубленном уровне.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хазанкин Р.Г., Зильберберг Н.И.* Ключевые задачи в обучении математике // Башкортостан укытыусыхы. 1984. № 9. С. 58–62.
2. *Решу ЕГЭ.* URL: <http://ege.sdangia.ru>

**Киреенко** Светлана Григорьевна, магистрантка ТГУ; [svkireenko@mail.ru](mailto:svkireenko@mail.ru)

**Гриншпон** Яков Самуилович, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры общей математики ММФ ТГУ; [grinshpon@mail.ru](mailto:grinshpon@mail.ru)

# Об обнаружении «разладки»

А.И. Клемешова, Т.Е. Емельянова

*Национальный исследовательский  
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Рассмотрены две различные процедуры обнаружения «разладки», то есть обнаружения момента изменения свойств потока наблюдений. Первая – параметрическая процедура, предложенная С.Э. Воробейчиковым. Вторая – непараметрическая процедура, предложенная Б.С. Дарховским. Процедуры изменения механизма генерации (или «разладки») характеризуются количеством ложных тревог и количеством запаздываний. Численное исследование обеих процедур показало более высокую работоспособность непараметрической процедуры. В работе представлены алгоритмы для реализации обеих процедур.

**Ключевые слова:** «разладка», момент изменения механизма генерации, ложная тревога, запаздывание.

## 1. Параметрическая процедура обнаружения разладки

Рассматривается случайный процесс GARCH(1,1)

$$x_{n+1} = \sigma_{n+1} \varepsilon_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где  $\{\varepsilon_n\}$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним, единичной дисперсией и известным распределением.

Условная вариация процесса  $x_{n+1}$  представляет собой случайный процесс вида

$$\sigma_{n+1}^2 = \alpha + \lambda x_n^2 + \mu \sigma_n^2 \quad (2)$$

Параметры  $\{\alpha, \lambda\}$  предполагаются неизвестными, а параметр  $\mu$  известным, причем параметры процесса удовлетворяют условиям

$$\alpha > 0, \quad \lambda > 0, \quad 0 < \lambda + \mu < 1. \quad (3)$$

Тогда процесс  $\sigma_{n+1}^2$  является стационарным [1].

Вектор параметров  $\Lambda = [\alpha, \lambda]$  меняет свое значение с  $\Lambda_0$  на  $\Lambda_1$  в случайный момент времени  $\theta$ . Начальное и конечное значения пара-

метров удовлетворяют условию

$$|\Lambda_0 - \Lambda_1|^2 \geq \Delta > 0, \quad (4)$$

где  $\Delta$  является известным значением. Требуется по наблюдениям за процессом  $x_n$  определить момент разладки.

Так как значения параметров до и после момента разладки являются неизвестными, то необходимо получить их оценки [2].

Процесс (1) можно записать в векторном виде

$$Y_{n+1} = \Lambda U_n + B_N \xi_{n+1}, \quad (5)$$

$N$  – натуральное число, такое, что  $C_N$  определена.

Для фиксированного значения  $H > 0$  определим момент остановки  $\tau = \tau(H)$

$$\tau = \tau(P) = \inf \{N_1 > N + 1 : \nu_{\min}(N_1) \geq H\}, \quad (6)$$

где  $\nu_{\min}(N_1)$  – минимальное собственное значение матрицы  $A(N_1)$ .

Последняя весовая функция  $\nu(\tau, x)$  находится из условия

$$\frac{\nu_{\min}(\tau)}{B^2} \geq \sum_{n=N+\sigma}^k \nu^2(n, x) U_n^T U_n, \quad \nu_{\min}(\tau) = H. \quad (7)$$

Оценка параметров  $\Lambda^*(H)$  в момент времени  $\tau$  имеет следующий вид:

$$\Lambda^*(H) = \left( \sum_{n=N+1}^{\tau} Y_{n+1} \nu(k, x) U_n \right) A^{-1}(\tau),$$

$$A(\tau) = \sum_{n=N+1}^{\tau} \nu(k, x) U_n U_n^T. \quad (8)$$

Свойства предложенной оценки задаются в теореме 1.

**Теорема 1** [2]. Для любого значения параметра процедуры  $H > 0$  момент прекращения наблюдений  $\tau(H)$  конечен с вероятностью единица и средний квадрат отклонения оценки  $\Lambda^*(H)$  от истинного значения вектора параметров  $\Lambda$  удовлетворяет неравенству

$$M \left\{ \left| \Lambda^*(H) - \Lambda \right| \right\}^2 \leq \frac{H+1}{H^2}. \quad (9)$$

### Алгоритм определения момента разладки:

1. На первом шаге определяются интервалы

$$[\tau_{i-1} + 1, \tau_i], \quad i \geq 1. \quad (10)$$

2. На каждом из этих интервалов строится оценка  $\Lambda_i^*(H)$  (8) процесса (1).

3. Далее сравниваются оценки параметров, полученные на интервалах

$$[\tau_{i-m-1} + 1, \tau_{i-m}] \text{ и } [\tau_{i-1} + 1, \tau_i], \quad (11)$$

отстоящих друг от друга на  $m$  шагов.

Если интервал  $[\tau_{i-1} + 1, \tau_i]$  не содержит момент разладки  $\theta$ , то вектор параметров  $\Lambda$  на этом интервале является постоянным и его значение равно или начальному  $\Lambda_0$ , или конечному  $\Lambda_1$  значению.

4. Если для определенного  $i$  разница между значениями параметров на интервалах  $[\tau_{i-m-1} + 1, \tau_{i-m}]$  и  $[\tau_{i-1} + 1, \tau_i]$  вида (11) не меньше, чем заданная величина  $\Delta$ , то

$$\tau_{i-m} < \theta < \tau_{i-1} + 1. \quad (12)$$

5. Составим статистику  $J_i$ , соответствующую интервалу  $[\tau_{i-1} + 1, \tau_i]$  (10) для  $i > m$ :

$$J_i = (\Lambda_i^* - \Lambda_{i-m}^*)^T (\Lambda_i^* - \Lambda_{i-m}^*). \quad (13)$$

Эта статистика характеризует квадратное отклонение оценок с номерами  $i$  и  $i - m$ .

Обозначим отклонение оценки  $\Lambda_i^*$  от ее истинного значения через  $\sigma_i$ . Если выполняется условие  $\theta > \tau_i$ , то до момента  $\tau_i$  значения параметров остаются неизменными и статистика (13) имеет вид

$$J_i = |\sigma_i - \sigma_{i-m}|^2. \quad (14)$$

Если  $\tau_m < \theta < \tau_{i-1}$ , то есть изменение значений параметров произошло на интервале  $[\tau_m, \tau_{i-1}]$ , то статистика  $J_i$  примет следующий вид:

$$J_i = |\Lambda_1 - \Lambda_0 + \sigma_i - \sigma_{i-m}|^2. \quad (15)$$

Значение заданной статистики (13) сравнивается с пороговым значением  $\delta$ . Решение о наличии разладки принимается при превышении значения статистики  $J_i$  значения  $\delta$ .

Моделировался процесс вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sigma_{n+1}\varepsilon_{n+1}, & n = 0, 1, \dots, \\ \sigma_{n+1}^2 = 1 + 0.03x_n^2 + 0.4\sigma_n^2, & \text{до разладки;} \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sigma_{n+1}\varepsilon_{n+1}, & n = 0, 1, \dots, \\ \sigma_{n+1}^2 = 2 + 0.06x_n^2 + 0.4\sigma_n^2, & \text{после разладки.} \end{cases} \quad (17)$$

То есть вектор  $\Lambda_0 = (1 \ 0.03)$  меняется на  $\Lambda_1 = (2 \ 0.06)$ .

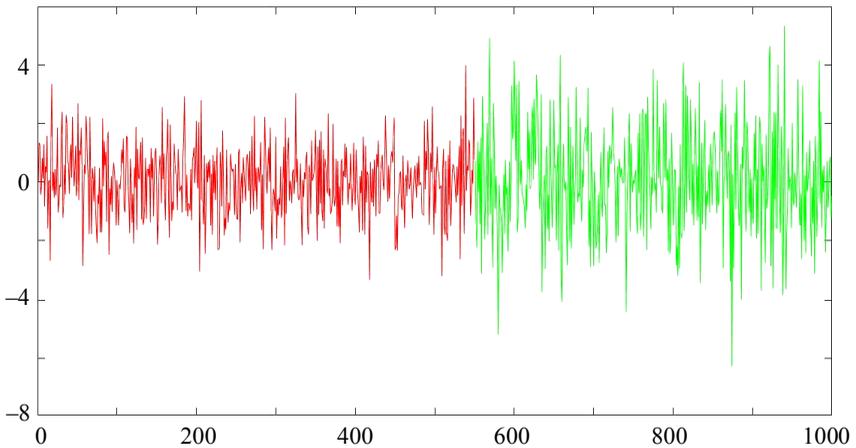


Рис. 1. Траектории моделируемого процесса. Объем данных: 1000

Результаты моделирования приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

**Оценки параметров процесса**

$H$	$\Lambda_1^*$	$\Lambda_2^*$
$H = 350$	$\begin{pmatrix} 0.901 \\ 0.041 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.854 \\ 0.049 \end{pmatrix}$
$H = 400$	$\begin{pmatrix} 0.947 \\ 0.039 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.988 \\ 0.055 \end{pmatrix}$

Оценки моментов изменения параметров

$H, \delta$	$\theta$	$\theta^*$	Кол-во ложных тревог	Кол-во запаздываний
$H = 350$ $\delta = 0.1$	550	580	30	25
$H = 400$ $\delta = 0.075$	550	565	25	20

## 2. Непараметрическая процедура обнаружения разладки

Алгоритм основывается на следующей теореме.

**Теорема 2** [3]. Для любой функции  $x(\bullet)$  из некоторого плотного подмножества тотально нетривиальных функций, удовлетворяющих условию Гёльдера и заданных своими  $n$  отсчетами на равномерной решетке, любых (достаточно малых)  $k > 0$ ,  $\delta > 0$  и  $n \geq n_0(x(\bullet))$ , существуют семейство методов аппроксимации  $F^*$ , числа

$$0 < \alpha(n, x(\bullet)) < \beta(n, x(\bullet)) < 1, B(n, x(\bullet)),$$

$$|B(\bullet)| \geq c(n, x(\bullet)) > 0; \quad (18)$$

функции  $\rho(S)$ ,  $\xi(S)$  и множество

$$N \subset Q = [\alpha(\bullet), \beta(\bullet)], \mu(N) > \mu(Q) - \delta,$$

такие, что при аппроксимации методами  $F^* \subseteq F$  для  $S \in N$  справедливо

$$\log \varepsilon = A + B \log S + \rho(S) \log S + \xi(S),$$

$$\sup_{S \in N} \max(|\rho(S)|, |\xi(S)|) \leq k. \quad (19)$$

### Алгоритм обнаружения разладки:

1. Временной ряд  $X_t$  делим на окна размера  $m$ , то есть получаются интервалы  $[t_j, t_{j+1}]$ , где  $j = 1, \dots, [N/m]$ ,  $N$  – количество наблюдений.

2. Задаем вектор  $\log S = [n_1, \dots, n_k]$ ,  $k$  – количество элементов этого вектора.

3. Далее, каждое  $n_i$  наблюдение удаляем из окна.

4. Каким-либо методом из набора методов аппроксимации  $F$  восстанавливаем текущий ряд наблюдений (в этой работе применяется метод наименьших квадратов). Фиксируем минимальную ошибку восстановления  $err_i$  и ставим ей в соответствие  $n_i$ .

5. Пункты 3 – 4 проделываем для каждого  $n_i$ .

6. Получились пары  $(n_i, err_i)$ . Эти точки аппроксимируем прямой  $y = Ax + B$ .

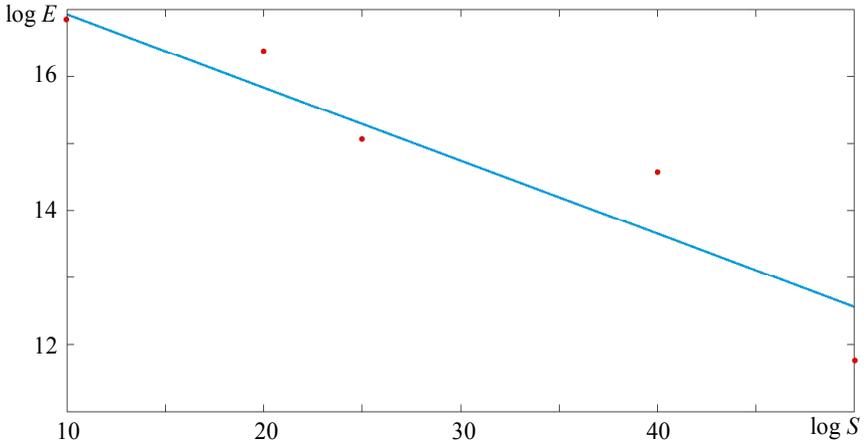


Рис. 2. Зависимость вида (19)

7. Пункты 3 – 6 проделываем для каждого окна  $[x_j, x_{j+1}]$ . Получаем последовательности  $\{A\}_{j \geq 1}$  и  $\{B\}_{j \geq 1}$ ,  $j = 1, \dots, [N/m]$ .

8. Фиксируем разницу двух ближайших коэффициентов  $\delta_{2j} = A_{j+1} - A_j$  и  $\delta_{1j} = A_{j+1} - A_j$ .

9. Если  $\max_j \delta_{1j} = \max_j \delta_{2j} \neq 0$ , то разладка находится в  $j$ -м окне.

Итак, для всех значений  $N$  и  $\delta$  параметрической процедуры и всех окон непараметрической проводилось 100 численных экспериментов. При одних и тех же условиях описанные выше процедуры показали, что параметрическая имеет ложных тревог 25; количество запаздываний 20. Непараметрическая процедура имеет ложных тревог 7; количество запаздываний 5.

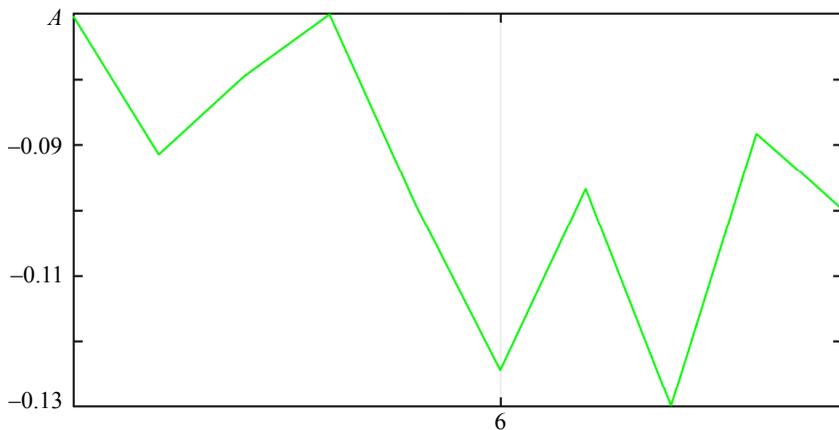


Рис. 3. Коэффициент  $A$

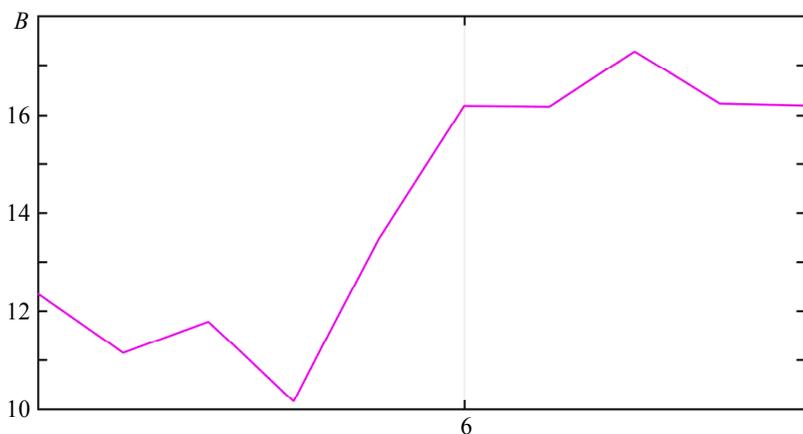


Рис. 4. Коэффициент  $B$

Таблица 3

**Оценка момента изменения**

Длина процесса	Момент разладки	Номер окна	Размер окна	Количество ложных тревог	Количество запаздываний
1000	850	9	100	5	6
1000	550	6	100	7	5
1000	850	12	80	6	8
1000	550	9	60	6	7

Численное исследование параметрической процедуры показало, что точность оценки неизвестных параметров процесса зависит от выбора значения  $H$ . При возрастании параметра  $H$  увеличивается точность оценивания. При уменьшении  $H$  ухудшается точность оценки момента изменения механизма генерации.

Выбор величины  $\delta$  влияет на скорость определения момента разладки. При увеличении  $\delta$  увеличивается количество запаздываний при обнаружении. При уменьшении  $\delta$  увеличивается количество ложных тревог.

У параметрической количество ложных тревог и количество запаздываний мало. Исследование проводилось для окон длины 100, 80, 60 наблюдений. При уменьшении размера окна количество запаздываний в обнаружении МИМГ изменилось незначительно. Таким образом, непараметрическая процедура работает лучше, чем параметрическая.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А.Н.* Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения // Теория вероятностей и ее применение. Т. 8. № 1. 1963. С. 26–52.
2. *Сергеева Е.Е., Воробейчиков С.Э.* Гарантированная оценка параметров и обнаружение момента разладки GARCH(1,1)-процесса // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 3. С. 31–42.
3. *Дарховский Б.С., Пирятинская А.* Новый подход к проблеме сегментации временных рядов произвольной природы // Труды МИАН. 2014. Т. 287. С. 61–74.

---

**Клемешова** Анна Ивановна, магистрантка ММФ ТГУ; [anya-3.4@mail.ru](mailto:anya-3.4@mail.ru)

**Емельянова** Татьяна Вениаминовна, к.ф.-м.н, доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ ТГУ

# Математическое моделирование переноса примеси в уличном каньоне\*

Д.В. Лещинский

*Национальный исследовательский  
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Исследованы структура течения и характер распространения примеси в идеализированном уличном каньоне. Проведено исследование сеточной сходимости, по результатам которого было выбрано оптимальное сеточное покрытие рассматриваемой области. Посчитаны максимальные и средние концентрации примеси в зоне дыхания и в каньоне в целом.

**Ключевые слова:** *математическое моделирование, турбулентное течение, уличный каньон, перенос примеси.*

Вопросы экологии являются наиболее актуальными в современной реальности. Процесс урбанизации и ускорение технологического прогресса приводят к повышенным темпам роста загрязнения атмосферного воздуха над городами, что отрицательно воздействует на окружающую среду и здоровье человека.

В данной работе на основе разрабатываемой оригинальной микромасштабной математической модели M2U [1] проведено математическое моделирование процесса переноса примеси в уличном каньоне. Источник примеси представляет собой точечный источник вредных выбросов постоянной интенсивности. Размеры зданий соизмеримы с размерами области исследования. Экспериментальным путем проведено исследование сеточной сходимости, по результатам которого было определено оптимальное сеточное покрытие исследуемой области. Посчитаны максимальные, минимальные и средние концентрации примеси в зоне дыхания (до 2 м от земли) и в каньоне в целом.

## **Физико-математическая постановка задачи**

Рассматривается стационарное турбулентное движение в приземном слое воздуха над неоднородной подстилающей поверхностью с элемен-

---

\* Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-02-2020-1479/1.

тами крупномасштабной шероховатости, которые представляют собой здания (рис. 1).

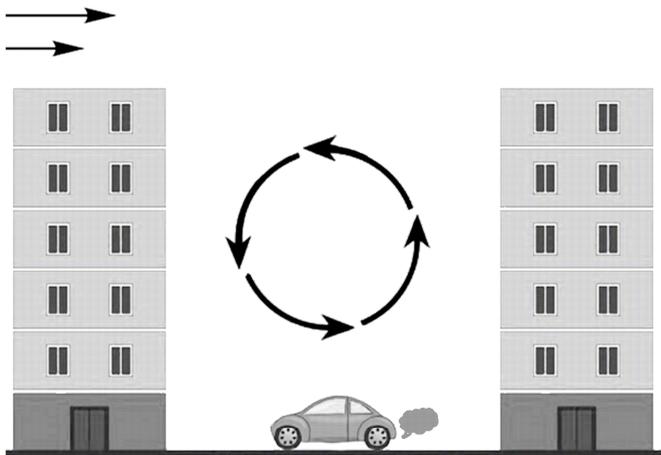


Рис. 1. Иллюстрация физической постановки задачи

Математическая модель включает в себя осредненные по Рейнольдсу уравнения неразрывности, уравнения Навье – Стокса, переноса примеси [2, 3] и теплообмена:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} + g_i \frac{(\bar{T} - T_0)}{T_0},$$

$$\frac{\partial \bar{T} \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{T u'_j}}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial \bar{C} \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( D \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{C u'_j}}{\partial x_j} + S, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь,  $\bar{u}_i$ ,  $u'_j$  – осредненные и пульсационные проекции вектора скорости на оси координат;  $\bar{p}$  – давление;  $\rho$  – плотность;  $\nu$  – кинемати-

ческая вязкость воздуха;  $\bar{T}$  – осредненная температура;  $\bar{C}$  – осредненное значение концентрации примеси;  $S$  – функция, описывающая распределение точечных и линейных источников примеси;  $\overline{u'_i u'_j}$  – тензор напряжений Рейнольдса;  $a$ ,  $D$  – температуропроводность и коэффициент диффузии;  $g_i(0, 0, g)$  – компоненты ускорения свободного падения.

Замыкание описанной системы уравнений проводится с использованием градиентно-диффузионной гипотезы Бусинеска [2]:

$$\overline{u'_i u'_j} = -\nu_T \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij},$$

$$\overline{T' u'_j} = -\frac{\nu_T}{Pr_T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j},$$

$$\overline{C' u'_j} = -\frac{\nu_T}{Sc_T} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j}.$$

Для вычисления турбулентной вязкости используется двухпараметрическая  $k - \varepsilon$ -модель турбулентности, учитывающая влияние сил плавленности [4]:

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon},$$

$$\frac{\partial k \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P + G - \varepsilon,$$

$$\frac{\partial \varepsilon \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P + C_{\varepsilon 3} G) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k},$$

$$P = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad G = \beta g_j \frac{\nu_T}{Pr_T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j},$$

где  $\nu_T$  – турбулентная вязкость,  $k$  – кинетическая энергия турбулентности,  $\varepsilon$  – диссипация турбулентной кинетической энергии. Коэффициенты модели турбулентности  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.22$ ,  $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ ,  $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ ,  $C_{\varepsilon 3} = \tanh(|u_2| / |u_1|)$ ,  $C_\mu = 0.09$ ,  $Sc_T = 0.5$ ,  $Pr_T = 0.9$ .

Для задания значений скорости, турбулентных параметров, трения и теплового потока вблизи твердой поверхности используется метод пристеночных функций [5]. В модели не учитывается осаждение примеси на стенах, крышах и подстилающей поверхности, поэтому на границах производные от концентрации по нормали к поверхности задаются равными нулю. Краевые условия на выходе потока из расчетной области и на открытой верхней границе – это равенство нулю производных по нормали. При задании граничных условий на входе используются равномерные профили скорости  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{C}$ .

При расчете течений вокруг зданий использовался метод фиктивных областей, суть которого заключается в том, что значения векторных и скалярных величин в области преграды равны нулю и на границах фиктивных конечных объемах нет потоков диффузии [2].

### **Аппроксимация дифференциальной задачи и численный метод решения**

Дискретизация дифференциальной задачи выполнена методом конечного объема на структурированной декартовой сетке. Аппроксимация конвективных членов уравнений переноса выполняется с использованием противопотоковой схемы MLU Ван Лира [6]. Аппроксимация диффузионных членов осуществляется с использованием центрально-разностной схемы второго порядка. Результатом дискретизации является разностная схема второго порядка аппроксимации по пространству. Для согласования полей скорости и давления использовался метод SIMPLE [7]. Разработана итерационная вычислительная процедура для согласования поля скорости и давления и последовательного решения систем сеточных уравнений – неявных дискретных аналогов адвективно-диффузионных уравнений нелинейной задачи на основе метода неполной факторизации Булеева. Более подробное описание аппроксимации и численного метода решения на примере двумерной задачи представлено в работе [2, 3].

### **Исследование сеточной сходимости**

При моделировании течения геометрические характеристики уличного каньона, высота ( $H$ ) и ширина ( $W$ ) принимались 20 м, а глубина ( $L$ ) 30 м. Моделирование течения проводилось на неравномерной сетке, построенной путем сгущения сеточных элементов в приграничных областях, а также в областях, где наблюдалась сложная структура течения.

Экспериментальным путем было выбрано оптимальное сеточное покрытие, которое достаточно точно описывает структуру течения и не требует высоких производительных мощностей.

При исследовании сеточной сходимости за основу было выбрано сеточное покрытие, состоящее из набора конечных элементов, покрывающих область вне каньона в соотношении: 1 конечный элемент к 1 м, и имеющее сгущение в области каньона в соотношении: 2 к 1. Далее это покрытие сгущалось в два раза во всех областях соответственно либо разрежалось в два раза. Таким образом было построено 3 варианта сеточного покрытия с условными названиями: S (Standard), E (Enlarged) и R (Reduced). На основе этих трех вариантов было составлено оптимальное сеточное покрытие I (Improved), которое показало наилучший результат по соотношению точности моделирования ко времени проведения расчетов. Данное покрытие имело сгущение до 2 конечных элементов на 1 м каньона и в области 10 м в каждую сторону от границы каньона. У стен уличного каньона и крыш зданий строилась полоса из 5 ячеек с размером 0.1 м в направлении по нормали к поверхности. Последнее сделано для попадания безразмерной величины  $u^+$  в рекомендуемый диапазон от 30 до 300.

Для всех вариантов сеточных покрытий проводилось моделирование до получения установившегося решения. Контроль получения установившегося решения выполнялся по наблюдению значений горизонтальной и вертикальной компонент скорости и давления в центре каньона (рис. 2). Установление турбулентного течения в каньоне наблюдается после 2000 итераций.

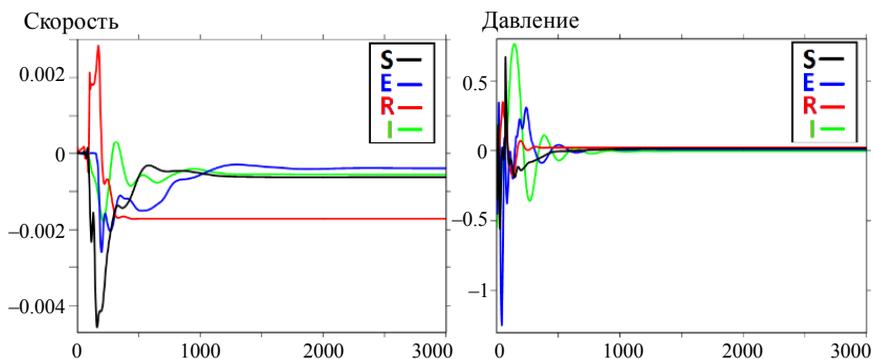


Рис. 2. Сходимость итерационного процесса

На рис. 3 (слева) представлен график изменения значения горизонтальной компоненты скорости вдоль горизонтальной линии, соединяющей крыши зданий, образующих уличный каньон. На рис. 3 (справа) представлен график изменения горизонтальной компоненты скорости вдоль по вертикальной линии от центра каньона до высоты в 30 м.

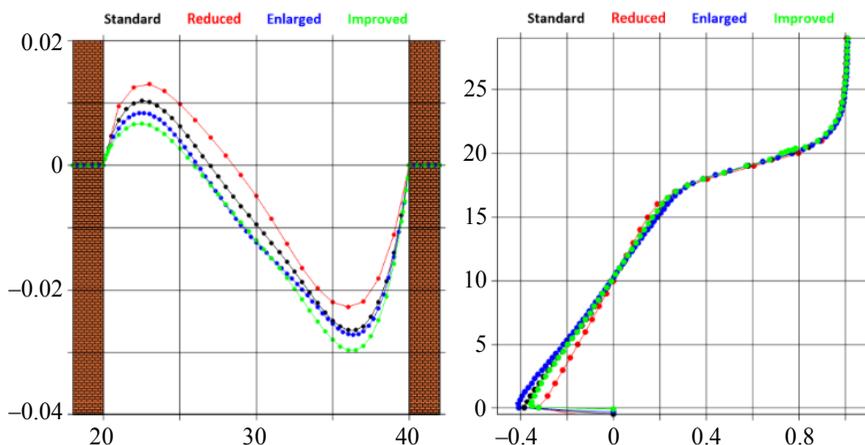


Рис. 3. Выбор сеточного разрешения

### Моделирование течения и проведение параметрических расчетов

Расчеты проводились на описанной выше структурированной декартовой сетке  $110 \times 62 \times 100$  по осям  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно. Источник поступления примеси постоянной интенсивности располагался в центре уличного каньона вблизи поверхности. Значение вязкости среды принято  $\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ , что соответствует вязкости воздуха при  $20^\circ\text{C}$ . Граничные условия задавались следующим образом: на входной границе горизонтальная скорость  $U_{in} = 1 \text{ м/с}$ ; на выходной границе равенство нулю нормальных производных скорости; на верхней стенке – условия скольжения. Начальные условия: продольная скорость равна скорости на входе (1 м/с), а вертикальная скорость и давление равны нулю.

На рис. 4 как результат моделирования представлено векторное поле скорости и контурное поле концентраций. Как видно из векторного поля скорости, поток ветра, проходя над каньоном, воздействует на воздушные массы внутри каньона, приводя их в движения. Таким образом,

образуется один большой вихрь внутри каньона, который, в свою очередь, воздействует на источник примеси, приводя примесь в движение. Тем самым начинается процесс выветривания.

Данные о концентрациях, полученные в ходе моделирования, представлены в таблице. Зона дыхания – это зона до 2 м от дна каньона. Из представленных данных видно, что концентрации внутри каньона на порядок выше, чем в каньоне в целом. Это обусловлено тем, что процесс выветривания недостаточно эффективен для данного каньона.

**Таблица концентраций**

Максимальная концентрация	Минимальная концентрация		Средняя концентрация	
	Зона дыхания	Каньон	Зона дыхания	Каньон
1.334	0.0000471	0.0000255	0.0009761	0.0003171

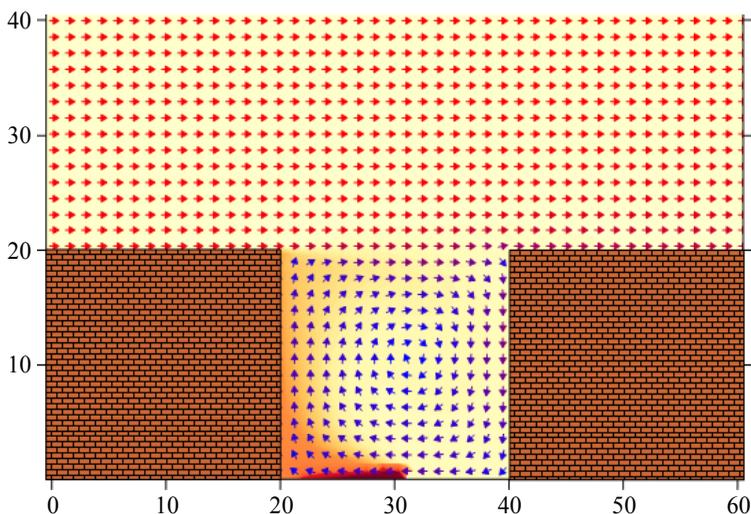


Рис. 4. Векторное поле скорости на фоне изолиний концентрации примеси

### **Верификация построенной математической модели**

На рис. 5 представлены результаты сравнения рассчитанных нормированных значений концентрации примеси вблизи наветренной и подветренной вертикальных стенок каньона с измерениями Хойдыша и Дэбберти, выполненными в ветровом туннеле [8]. Из рисунка видно,

что результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

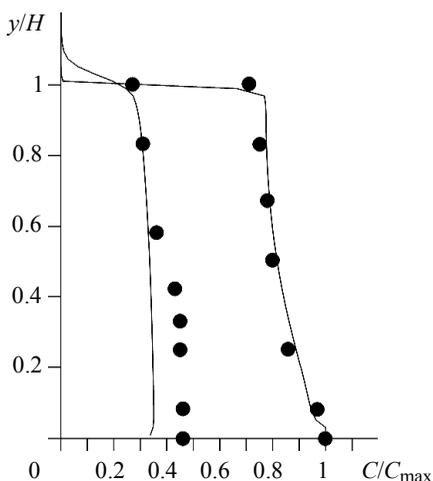


Рис. 5. Рассчитанные и измеренные [8] вертикальные профили нормированной концентрации примеси у наветренной (слева) и подветренной (справа) сторон каньона

### Заключение

Представлена микромасштабная модель турбулентного движения воздуха и переноса примеси в уличном каньоне. Проведено исследование сеточной сходимости для нахождения оптимального сеточного покрытия. Выполнена верификация разработанной модели на известных экспериментальных данных для переноса примеси при стационарном изотермическом турбулентном пространственном течении в каньоне. Представлены векторное поле скорости и контурное поле концентраций, визуально показывающее структуру течения в рассмотренном уличном каньоне. В дальнейшем планируется исследование структуры течения и характера распространения примеси в уличных каньонах разной геометрии и в зависимости от степени нагрева стен, образующих уличный каньон.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nuterman R., Starchenko A., Baklanov A.* Numerical model of urban aerodynamics and pollution dispersion // *Int. J. Environment and Pollution*. 2011. V. 44. No. 1–4. P. 385–393.
2. *Старченко А.В., Нутерман Р.Б., Данилкин Е.А.* Численное моделирование турбулентных течений и переноса примеси в уличных каньонах. Томск: Изд. дом Томского гос. ун-та, 2015. 252 с.
3. *Данилкин Е.А., Старченко А.В.* Моделирование распространения выбросов автомобильного транспорта в уличном каньоне // *Вычислительные технологии*. 2020. Т. 25. № 2. С. 4–21.
4. *Henkes R. A.W.M., Van Der Flugt F. F., Hoogendoorn C. J.* Natural convection flow in a square cavity calculated with low-Reynolds-number turbulence models // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1991. V. 34. P. 1543–1557.
5. *Launder B.E., Spalding D.B.* The numerical computation of turbulent flows // *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1974. V. 3. No. 2. P. 269–289.
6. *Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme: II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme // *J. Computational Physics*. 1974. V. 14. P. 361–370.
7. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: пер. с англ. М.: Энергоатомиздат; 1984. 149 с.
8. *Hoydysh W.G., Dabberdt W.F.* Kinematics and dispersion characteristics of flows in asymmetric street canyons // *Atmospheric Environment*. 1988. V. 22. P. 2677–2689.

---

**Лецинский** Дмитрий Викторович, мл. науч. сотр. РМЦ ТГУ; 360flip182@gmail.com

# Математическое моделирование установившегося течения дилатантной жидкости Оствальда – де Вейля в цилиндрической трубе

О.В. Матвиенко<sup>1,2</sup>, Д.А. Промзелева<sup>1</sup>, В.П. Базуев<sup>2</sup>,  
И.С. Черкасов<sup>1</sup>, А.Е. Литвинова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Национальный исследовательский  
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

<sup>2</sup> *Томский государственный архитектурно-  
строительный университет, г. Томск, Россия*

Проведено исследование течения суспензии, описываемой моделью Оствальда – де Вейля, в цилиндрической трубе, определена зависимость расхода жидкости от перепада давления, получены зависимости для радиального распределения скорости и эффективной вязкости течения. Установлено, что распределение эффективной вязкости характеризуется монотонным увеличением по мере приближения к стенкам канала. С увеличением значений параметра консистенции  $k$  возрастает диссипация механической энергии потока, что приводит к росту гидравлического сопротивления.

**Ключевые слова:** *реология, суспензии, вязкость, неньютоновские жидкости, модель Оствальда – де Вейля, гидротранспорт.*

В различных отраслях промышленности приходится иметь дело с неньютоновскими жидкостями, вязкость которых сильно зависит от распределения скорости течения и может сильно изменяться в технологическом процессе [1]. Для создания рекомендаций по оптимизации работы технологических устройств необходимо осуществить изучение особенностей течения неньютоновских сред.

Изучению реологических свойств сильновязких ньютоновских и неньютоновских жидкостей посвящено большое количество исследований. Подробный анализ течений реологически сложных сред приведен в монографиях [2–7].

В работе [8] рассмотрена задача моделирования двумерных течений в криволинейных каналах псевдопластической среды, описываемой с помощью реологической модели Пауэлла – Эйринга и исследованы физические явления, возникающие при локальном изменении температуры стенки канала.

Работа [9] посвящена численному исследованию течения в каналах нелинейновязких жидкостей, описываемых моделью Карро. В результате проведенных исследований определена структура течения в зависимости от реологических свойств жидкости и режимов течения.

Исследование течения вязкопластичной жидкости Шведова – Бингама в канале с внезапным расширением [10] показало, что в случае стационарного течения в области уступа реализуется режим с образованием зоны квазитвердого течения.

В работе [11, 12] проведено моделирование течения жидкости Балкли – Гершеля со свободной поверхностью, реализующегося при заполнении плоских каналов в поле силы тяжести.

Исследование нестационарных течений дилатантной и псевдопластичной жидкостей Оствальда – де Вейля, а также жидкости, описываемой моделью Уильямсона, вблизи твердого тела выполнено в работе [13].

Результаты исследования осесимметричного течения реакционноспособной дилатантной вязкой несжимаемой жидкости на начальном участке круглой трубы при преобладающем химическом тепловыделении приведены в [14].

В работах [15–19] проведено исследование течений в цилиндрической трубе неньютоновских сред, описываемых моделями Оствальда – де Вейля, Шведова – Бингама и Сиско. В результате проведенных исследований определена зависимость расхода жидкости от перепада давления, получены зависимости для радиального распределения скорости и эффективной вязкости течения.

В работах [20–25] проведено исследование влияние закрутки на структуру течения, гидравлические характеристики и распределение эффективной вязкости потоков неньютоновских жидкостей в трубе. Проведен анализ влияния реологических свойств среды на параметры течения.

Высококонтрированные и грубодисперсные суспензии, с которыми приходится иметь дело на практике, являются многокомпонентными, многофазными и дисперсными средами. Вязкость таких сред зависит от соотношения фаз, степени дисперсности, параметров течения [2–5] и описывается сложной функциональной зависимостью от градиента скорости.

Известно, что песчаные суспензии, золошлаковые гидросмеси обладают дилатантными свойствами [26–29]. В состоянии покоя подобные системы имеют минимальный объем жидких прослоек между твердыми

частицами. При небольших значениях скорости сдвига жидкость служит смазкой между частицами и уменьшает трение их друг о друга, при этом действующие напряжения оказываются небольшими. При высоких скоростях жидкость не успевает заполнять свободные пространства, образующиеся между движущимися частицами, и поэтому трение между частичками сильно возрастает, что приводит к увеличению вязкости [30]. Таким образом, эффективная вязкость дилатантных сред возрастает при увеличении интенсивности скоростей сдвиговых деформаций [2, 31].

Целью настоящей работы является исследование структуры течения закрученного потока дилатантной жидкости Оствальда – де Вейля в цилиндрическом канале.

### Математическая модель

Рассмотрим установившееся осесимметричное течение суспензии, описываемой реологическим соотношением Оствальда – де Вейля, в прямой горизонтальной трубе круглого сечения радиуса  $R$ , которое происходит под действием заданного постоянного градиента давления.

В случае стабилизированного осесимметричного течения уравнение динамики вязкой жидкости приобретает вид

$$\frac{1}{r} \frac{d\tau_{rx}}{dr} r = - \left| \frac{dp}{dx} \right|. \quad (1)$$

Реологический закон Оствальда – де Вейля для установившегося течения в канале можно записать в виде [29]

$$\tau_{rx} = k \left| \frac{du}{dr} \right|^{n-1} \frac{du}{dr}. \quad (2)$$

Интегрирование уравнения (2) с учетом граничных условий

$$r = 0: \frac{du}{dr} = 0; \quad r = R: u = 0 \quad (3)$$

позволяет определить радиальное распределение осевой скорости в канале

$$u = \frac{n}{n+1} \frac{R^{(n+1)/n}}{(2k)^{1/n}} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{1/n} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{(n+1)/n} \right). \quad (4)$$

Расход жидкости через поперечное сечение трубы вычисляется по формуле

$$Q = 2\pi \int_0^R ur dr = \frac{\pi n R^3}{3n+1} \left( \frac{R}{2k} \left| \frac{dp}{dx} \right| \right)^{1/n}, \quad (5)$$

а среднерасходная скорость определяется как

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{n}{3n+1} R \left( \frac{R}{2k} \left| \frac{dp}{dx} \right| \right)^{1/n}. \quad (6)$$

Эффективная вязкость жидкости Оствальда – де Вейля  $\mu_{\text{eff}}$  для гидродинамически стабилизированного течения в цилиндрической трубе может быть рассчитана с помощью соотношения

$$\mu_{\text{eff}} = k^{1/n} \left( \left| \frac{dp}{dx} \right| \frac{r}{2} \right)^{1-1/n}. \quad (7)$$

Определим среднерасходную вязкость неньютоновской жидкости  $\bar{\mu}$  как вязкость ньютоновской жидкости, движущейся со среднерасходной скоростью  $\bar{u}$  в трубе радиусом  $R$  под действием перепада давления  $\left| \frac{dp}{dx} \right|$ .

Для степенной жидкости Оствальда – де Вейля среднерасходная вязкость потока  $\bar{\mu}$  будет равна

$$\bar{\mu} = \frac{3n+1}{8n} (2k)^{1/n} R^{1-1/n} \left| \frac{dp}{dx} \right|^{1-1/n}. \quad (8)$$

В технических расчетах принято связывать перепад давления со среднерасходной скоростью течения с использованием коэффициента гидравлического сопротивления  $\zeta$ , который характеризует безразмерное падение давления на единицу длины канала. При этом, перепад давления пропорционален динамическому напору и определяется зависимостью Дарси – Вейсбаха:

$$\left| \frac{dp}{dx} \right| = \zeta \frac{\rho \bar{u}^2}{4R}. \quad (9)$$

В случае степенной жидкости Оствальда – де Вейля выражение для определения коэффициента гидравлического сопротивления имеет вид

$$\zeta = \left( \frac{6n+2}{n} \right)^2 \frac{(2k)^{2/n}}{\rho R^{1+2/n}} \left| \frac{dp}{dx} \right|^{1-2/n}. \quad (10)$$

## Результаты математического моделирования

Перейдем к анализу полученных результатов. При математическом моделировании диапазон изменения параметров был выбран следующим: параметр консистенции изменялся в диапазоне  $k = 0.001 - 0.1 \text{ Па}\cdot\text{с}^n$ ; показатель нелинейности  $n = 1 - 4$ , перепад давления  $|dp/dx| = 100 - 2000 \text{ Па/м}$ . Выбранный диапазон изменения параметров соответствует свойствам водно-песчаной суспензии, применяемой и производстве строительных материалов. Радиус канала составлял  $R = 0.1 \text{ м}$ .

На рис. 1 представлено распределение скорости по радиусу трубы, рассчитанное для одного и того же значения перепада давления и расхода жидкости, но разных значений показателя нелинейности. Отметим, что при этих условиях величина среднерасходной вязкости  $\bar{\mu}$  будет оставаться постоянной. Зависимость между консистенцией и

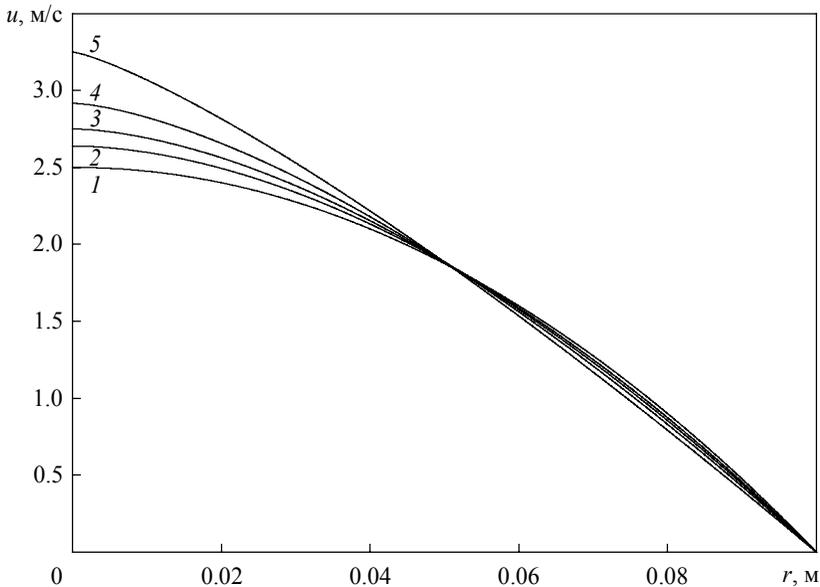


Рис. 1. Радиальное распределение скорости,  $\bar{\mu} = 0.1 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ,  $|dp/dx| = 100 \text{ Па/м}$ :  
1 – ньютоновская жидкость:  $n = 1$  ( $k = \mu = 0.1 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ); 2 –  $n = 1.25$  ( $k = 0.04 \text{ Па}\cdot\text{с}^{1.25}$ );  
3 –  $n = 1.5$  ( $k = 0.016 \text{ Па}\cdot\text{с}^{1.5}$ ); 4 –  $n = 2$  ( $k = 2.6 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}^2$ );  
5 –  $n = 4$  ( $k = 1.8 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}^4$ )

среднерасходной вязкостью с учетом полученных ранее соотношений можно представить в виде

$$k = \frac{1}{2} \left( \frac{8n}{3n+1} \right)^n \bar{\mu}^n R^{1-n} \left| \frac{dp}{dx} \right|^{1-n}. \quad (11)$$

С увеличением показателя нелинейности происходит трансформация профиля скорости от параболического ( $n=1$ ) к линейному. Поскольку расход жидкости при выбранных параметрах остается неизменным, скорость потока в ядре потока возрастает, а в пограничном слое – уменьшается.

На рис. 2 показана зависимость эффективной вязкости  $\mu_{\text{eff}}$  от радиальной координаты  $r$ . Это распределение является типичным для дилатантных сред и характеризуется монотонным увеличением вязкости по мере приближения к стенкам канала.

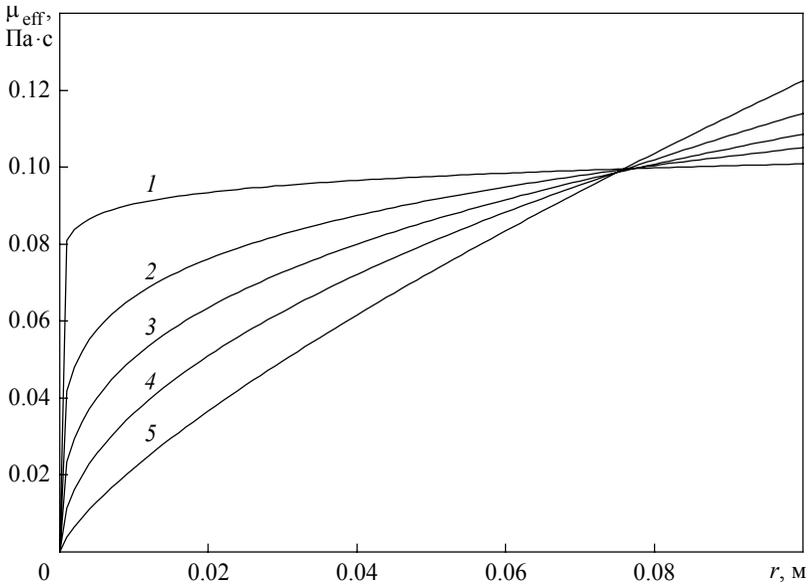


Рис. 2. Радиальное распределение эффективной вязкости,  $\bar{\mu} = 0.1 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ,  $|dp/dx| = 100 \text{ Па/м}$ : 1 –  $n = 1.05$  ( $k = 0.083 \text{ Па}\cdot\text{с}^{1.05}$ ); 2 –  $n = 1.25$  ( $k = 0.04 \text{ Па}\cdot\text{с}^{1.25}$ ); 3 –  $n = 1.5$  ( $k = 0.016 \text{ Па}\cdot\text{с}^{1.5}$ ); 4 –  $n = 2$  ( $k = 2.6 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}^2$ ); 5 –  $n = 4$  ( $k = 1.8 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}^4$ )

Вблизи оси течения наблюдается резкий рост значений эффективной вязкости. В периферийной и пристеночной областях темп возрастания вязкости замедляется.

Для значений показателя нелинейности близких к единице  $n \approx 1$  радиальное распределение эффективной вязкости характеризуется резким скачкообразным ростом значений в приосевой области. Однако в пристеночной и периферийной областях течения радиальное распределение эффективной вязкости близко к однородному. С увеличением показателя нелинейности  $n$  скачок значений вязкости в приосевой зоне течения становится менее выраженным. При этом радиальное распределение вязкости приближается к линейному.

Известно [1], что при движении вязкой жидкости в трубах происходят потери механической энергии в результате действия вязких сил. Эти потери характеризуются коэффициентом гидравлического

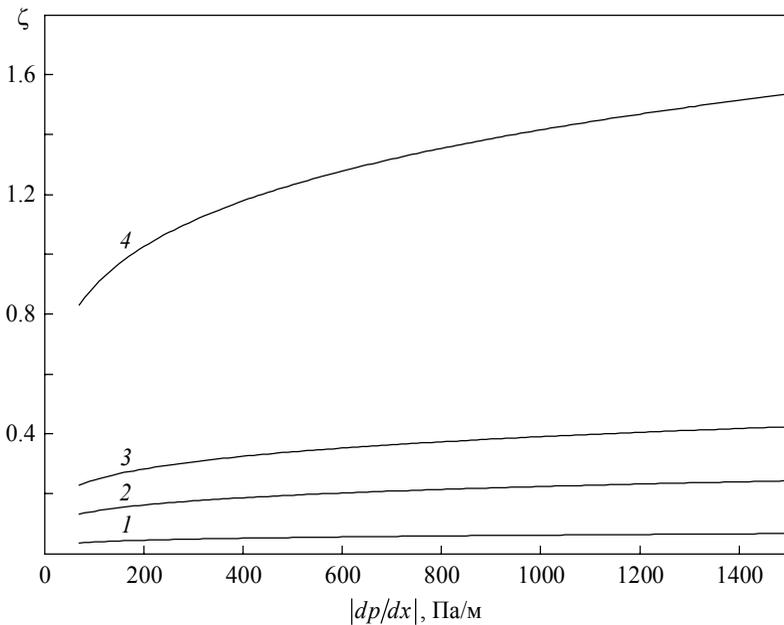


Рис. 3. Зависимость коэффициента гидравлического сопротивления  $\zeta$  от перепада давления  $|dp/dx|$ ,  $\rho = 1300 \text{ кг/м}^3$ ,  $n = 2.5$ : 1 –  $k = 0.001 \text{ Па} \cdot \text{с}^{2.5}$ ; 2 –  $k = 0.005 \text{ Па} \cdot \text{с}^{2.5}$ ; 3 –  $k = 0.01 \text{ Па} \cdot \text{с}^{2.5}$ ; 4 –  $k = 0.05 \text{ Па} \cdot \text{с}^{2.5}$

сопротивления. Известно, что при течении ньютоновской жидкости коэффициент гидравлического сопротивления уменьшается с ростом перепада давления. При этом коэффициент  $\zeta$  обратно пропорционален  $|dp/dx|$ . При течении дилатантных сред с невысоким значением показателя нелинейности  $1 < n < 2$  также происходит уменьшение гидравлического сопротивления с ростом перепада давления. Однако зависимость  $\zeta$  от  $|dp/dx|$  становится менее выраженной. При  $n = 2$  коэффициент гидравлического сопротивления перестает зависеть от перепада давления и определяется только свойствами жидкости и размерами канала. При высоких значениях показателя нелинейности  $2 < n$  с ростом перепада давления происходит рост гидравлического сопротивления (см. рис. 3).

### Заключение

- С увеличением показателя нелинейности происходит трансформация профиля скорости от параболического для ньютоновских жидкостей к линейному.
- Распределение эффективной вязкости характеризуется монотонным увеличением по мере приближения к стенкам канала.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1974.
2. *Малкин А.Я., Исаев А.И.*; Реология: концепции, методы, приложения. СПб: Профессия, 2007. 560 с.
3. *Кутепов А. М., Полянин Л. Д., Запьянов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А.* Химическая гидродинамика: справочное пособие. М.: Бюро Квантум, 1996.
4. *Островский Г.М.* Прикладная механика неоднородных сред. СПб.: Наука, 2000. 359 с.
5. *Матвиенко О.В., Унгер Ф.Г., Базуев В.П.* Математические модели производственных процессов для приготовления битумных дисперсных систем. Томск: Изд-во ТГАСУ, 2015.
6. *Климов Д.М., Петров А.Г., Георгиевский Д.В.* Вязкопластические течения: динамический хаос, устойчивость и перемешивание. М.: Наука, 2005.
7. *Уилкинсон У.Л.* Неньютоновские жидкости. М.: Мир, 1964.
8. *Вахрушев А.А., Липанов А.М., Вахрушев А.В.* Численное исследование течения жидкости с переменными вязкими свойствами в изогнутых каналах // Химическая физика и мезоскопия. 2005. Т. 7. № 3. С. 286–300.
9. *Снигерев Б.А., Тазюков Ф.Х.* Двухслойное течение расплавов полимеров в каналах фильер // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. Вып. 3. С. 349–354.

10. *Алексеева К.Г., Борзенко Е.И.* Структура течения жидкости Шведова – Бингама в канале со скачком сечения // Изв. вузов. Физика. 2012. № 7/2. С. 15–19.
11. *Борзенко Е.И., Рыльцов И.А., Шрагер Г.Р.* Кинематика течения жидкости Балкли – Гершеля со свободной поверхностью при заполнении канала // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2017. № 5. С. 53–64.
12. *Борзенко Е. И., Шрагер Г. Р., Якутенок В. А.* Течение неньютоновской жидкости со свободной поверхностью при заполнении круглой трубы // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. № 2. С. 53–60.
13. *Перминов А.В.* Нестационарное движение обобщенной ньютоновской жидкости около твердого тела // ИФЖ. 2014. Т. 87. № 1. С. 139–147.
14. *Ананьев Д.В.* Исследование режима прогрессивного нарастания температуры при течении дилатантной жидкости на начальном участке круглой трубы // Труды Академэнерго. 2005. № 1. С. 12–16.
15. *Матвиенко О.В., Базуев В.П., Черкасов И. С., Асеева А.Е. Веник В.Н.* Течение битумного вязкого, описываемого моделью Оствальда – де Вейля, в цилиндрической трубе // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2020. Т. 22. № 1. С. 171–192.
16. *Матвиенко О.В., Базуев В.П., Черкасов И.С., Литвинова А.Е.* Исследование гидравлических характеристик потока водно-песчаной суспензии в трубе // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2020. Т. 22. № 2. С. 129–144.
17. *Матвиенко О.В., Базуев В.П., Сабьлина Н.Р., Асеева А.Е., Суртаева А.А.* Исследование установившегося течения вязкопластического битумного вязкого, описываемого моделью Шведова – Бингама, в цилиндрической трубе // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2019. Т. 21. № 3. С. 158–177.
18. *Матвиенко О.В.* Исследование установившегося течения псевдопластической жидкости, описываемой моделью Сиско, в цилиндрической трубе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С. 99–112.
19. *Матвиенко О.В.* Численное исследование течения неньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале // Изв. вузов. Физика. 2014. Т. 57. № 8/2. С. 183–189.
20. *Matvienko O.V., Bazuev V.P., Venik V.N., Smirnova N.G.* Numerical investigation of Herschel – Bulkley fluids mixing // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering Advanced Materials in Construction and Engineering. Ser. International Scientific Conference of Young Scientists: Advanced Materials in Construction and Engineering, TSUAB 2014. 2015. С. 012034.
21. *Матвиенко О.В., Базуев В.П., Южанова Н.К.* Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84. № 3. С. 544–547.
22. *Матвиенко О.В., Базуев В.П., Южанова Н.К.* Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости в цилиндрическом канале // ИФЖ. 2014. Т. 87. № 1. С. 192–199.
23. *Матвиенко О.В., Базуев В.П., Дульзон Н.К.* Математическое моделирование течения закрученного потока вязкопластической жидкости в цилиндрическом канале // ИФЖ. 2014. Т. 87. № 5. С. 1129–1137.

24. *Матвиенко О.В., Базуев В.П., Асеева А.Е.* Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости Балкли – Гершеля в цилиндрическом канале // ИФЖ. 2019. Т. 92. № 1. С. 215–226.
25. *Матвиенко О.В., Базуев В.П., Асеева А.Е.* Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости Балкли – Гершеля в цилиндрическом канале // ИФЖ. 2019. Т. 92. № 6. С. 2641– 2651.
26. *Prosvetov V. I., Sumets P. P., Vervevko N. D.* Modeling of Flow of Medium with Homogeneous Microstructure // Int. J. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2011. V. 5. No. 1. P. 508–516.
27. *Barnes H.A.* A handbook of elementary rheology. Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics, University of Wales. 2000.
28. *Jiao D., Sharma M. M.* Investigation of dynamic mud cake formation: The concept of minimum overbalance pressure // SPE 26323, Proceedings of the SPE 68th Annual Technical Conference & Exhibition, Houston, TX, October 3–6, 1993.
29. *Ferraris C.* Measurement of the rheological properties of high performance concrete // J. Research of the National Institute of Standards and Technology. 1999. V. 104. P. 461–466.
30. *Erdem T.K., Khayat K.H., Yahia A.* Correlating rheology of self-consolidating concrete to corresponding concrete-equivalent mortar // J. ACI Materials. 2009. V. 106. No. 2. P. 154–160.
31. *Tattersall G.H., Banfill P.F.G.* The rheology of fresh concrete. Pitman, 1983.

---

**Матвиенко** Олег Викторович, д.ф.-м.н., профессор кафедры физической и вычислительной математики ММФ ТГУ, профессор кафедры физики, химии и теоретической механики ТГАСУ, matvolegv@mail.ru

**Промзелева** Дарья Алексеевна, магистрантка ММФ ТГУ; dashka140796@mail.ru

**Базуев** Виктор Павлович, к.ф.-м.н., доцент кафедры автомобильных дорог ТГАСУ

**Черкасов** Илья Сергеевич, студент ММФ ТГУ

**Литвинова** Алена Евгеньевна, аспирантка ТГУ; alena.aseeva.93@mail.ru

# Эффективное оценивание непараметрического сигнала на фоне шумов Орнштейна – Уленбека\*

М.А. Повзун, Е.А. Пчелинцев

*Национальный исследовательский  
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Рассматривается задача эффективного статистического оценивания непараметрического сигнала, наблюдаемого в каналах связи с шумами, моделируемыми негауссовскими процессами Орнштейна – Уленбека. При этом предполагается, что наблюдения процесса доступны только в дискретные моменты времени. Синтезируется улучшенный метод оценивания для этой задачи. Устанавливается эффективность улучшения в среднеквадратической точности предлагаемой процедуры обработки сигналов. Приводится моделирование методом Монте-Карло, которое численно подтверждает полученные теоретические результаты.

**Ключевые слова:** *эффективное оценивание, обработка сигналов, квадратичный риск, непараметрическая регрессия, процесс Орнштейна – Уленбека.*

Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  наблюдаемый процесс  $(y_t)_{t \geq 0}$  удовлетворяет уравнению непараметрической регрессии вида

$$y_t = S(t)dt + d\xi_t, \quad 0 \leq t \leq n, \quad (1)$$

где  $S(t) \in \mathbf{L}_2[0, 1]$  – неизвестный 1-периодический сигнал,  $n$  – число периодов наблюдений,  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  – ненаблюдаемый шум, моделируемый процессом Орнштейна – Уленбека, который описывается уравнением

$$d\xi_t = a\xi_t dt + du_t, \quad u_t = \varrho_1 w_t + \varrho_2 z_t.$$

Здесь  $a$ ,  $\varrho_1$  и  $\varrho_2$  – некоторые неизвестные мешающие параметры;  $(w_t)_{t \geq 0}$  – процесс броуновского движения;  $(z_t)_{t \geq 0}$  – процесс Леви [6].

Задача состоит в том, чтобы оценить неизвестную функцию  $S$  в модели (1) по дискретным наблюдениям

---

\* Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации, проект № МК-834.2020.9.

$$(y_{t_j})_{1 \leq j \leq np}, \quad t_j = \frac{j}{p},$$

где фиксированное число  $p$  – частота наблюдений.

Проблема оценивания сигналов с импульсными шумами, которые определяются с помощью полумарковских или сложных пуассоновских процессов с неизвестными распределениями были рассмотрены в работах [1, 2]. В [3–6] разработаны улучшенные параметрические и непараметрические методы оценивания сигналов. Следует подчеркнуть, что во всех этих работах задачи об улучшенных оценках изучаются только для полных случаев наблюдений, т.е. когда вся траектория процесса  $(y_t)_{1 \leq t \leq n}$  доступна для наблюдения.

Цель этой статьи – разработать улучшенные методы оценивания для неполных наблюдений, т.е. когда процесс (1) можно наблюдать только в фиксированные моменты времени.

Качество оценивания неизвестного сигнала  $S$  будем измерять среднеквадратическим риском

$$R_Q(\hat{S}, S) := \mathbf{E}_{Q,S} \|\hat{S} - S\|^2 \quad \text{и} \quad \|S\|^2 = \int_0^1 f^2(t) dt, \quad (2)$$

где  $\hat{S}$  – некоторая оценка (измеримая функция от наблюдений);  $\mathbf{E}_{Q,S}$  – математическое ожидание относительно распределения наблюдений  $\mathbf{P}_{Q,S}$  процесса (1) с фиксированным распределением  $Q$  шумов  $(\xi_t)_{0 \leq t \leq n}$ . Поскольку распределение  $Q$  неизвестно, то будем использовать робастный риск

$$R^*(\hat{S}, S) = \sup_{Q \in Q_n} R_Q(\hat{S}, S).$$

### Улучшенные оценки МНК

Для того чтобы оценить неизвестную функцию  $S$  в уравнении (1), воспользуемся ее разложением Фурье в пространстве  $\mathbf{L}_2[0,1]$  по тригонометрическому базису  $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ . Отметим, что функции  $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq p}$  на сетке  $T_p = \{t_1, \dots, t_p\}$ ,  $t_j = j/p$ , образуют ортонормированный базис в

гильбертовом пространстве  $\mathbb{R}^{\mathcal{T}_p}$ . Запишем дискретное разложение Фурье неизвестной функции  $S$  на сетке  $\mathcal{T}_p$

$$S(x) = \sum_{j=1}^p \theta_{j,p} \phi_j(t),$$

где соответствующие коэффициенты Фурье  $\theta_{j,p} = (S, \phi_j)_p$  могут быть оценены по дискретным данным как

$$\hat{\theta}_{j,p} = \frac{1}{n} \int_0^n \psi_{j,p}(t) dy_t, \quad \psi_{j,p}(t) = \sum_{k=1}^{np} \varphi_j(t_k) \mathbf{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t).$$

Используя здесь уравнение (1), можем записать

$$\hat{\theta}_{j,n} = \bar{\theta}_{j,p} + \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{j,p}, \quad \xi_{j,p} = \frac{1}{\sqrt{n}} I_n(\psi_{j,p}).$$

Здесь  $\bar{\theta}_{j,p} = (S, \phi_j) = \theta_{j,p} + h_{j,p}$ , где  $I_n(f) = \int_0^n f(t) d\xi_t$

и  $h_{j,p} = h_{j,p}(S) = \sum_{k=1}^p \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi_j(t_k) (S(t) - S(t_k)) dt$ .

Как и в [2], определим класс взвешенных оценок наименьших квадратов для  $S(t)$  как

$$\hat{S}_\gamma(t) = \sum_{j=1}^p \gamma(j) \hat{\theta}_{j,n} \psi_{j,p}(t), \quad (3)$$

где  $\gamma = (\gamma(j))_{1 \leq j \leq p \in \mathbb{R}^p}$  – весовые коэффициенты из некоторого конечно-го множества  $\Gamma \in [0, 1]^p$ , такого, что для любого вектора  $\gamma \in \Gamma$  существует некоторое фиксированное  $d = d(\gamma) \leq p$ , такое, что первые  $d$  компонент равны единице. Пример такого множества весовых коэффициентов можно найти в [6].

Вместо классических оценок МНК для коэффициентов Фурье, определим сжимающие оценки

$$\theta_{j,n}^* = (1 - g(j)) \hat{\theta}_{j,p},$$

где  $g(j) = \frac{c_n}{|\hat{\theta}_n|_d} 1_{\{1 \leq j \leq d\}}$ ,  $1_A$  – индикатор множества  $A$ ,  $c_n$  – некоторая

известная величина, такая, что  $c_n \approx d/n$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $|x|_d^2 = \sum_{j=1}^d x_j^2$  для

любого вектора  $x = (x_j)_{1 \leq j \leq d}$  из  $\mathbb{R}^p$ . Определим теперь класс сжимающихся взвешенных оценок МНК сигнала  $S$  в следующем виде:

$$S_\gamma^*(t) = \sum_{j=1}^p \gamma(j) \theta_{j,p}^* \Psi_{j,p}(t). \quad (4)$$

Пусть  $L$  – константа Липшица, т.е.

$$L = \sup_{0 \leq s, t \leq 1} \frac{|S(t) - S(s)|}{|t - s|}.$$

Оценка (4) обладает следующим свойством.

**Теорема 1.** Пусть в (1) функция  $S$  – липшицева. Тогда для любого  $n \geq 1$  и  $p \geq 1$

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}_n} \sup_{\|S\| \leq r} \Delta_Q(S) \leq \Delta_n^*,$$

$$\Delta_Q(S) = R_Q(S_\gamma^*, S) - R_Q(\hat{S}_\gamma, S) \text{ и } \Delta_n^* = -c_n^2 + \frac{2\sqrt{d}\varphi_* L}{p} c_n.$$

Из этой теоремы следует, что при достаточной частоте наблюдений  $p$  процесса (1) предлагаемая оценка (4) превосходит по среднеквадратической точности оценку (3).

### Метод выбора модели

Далее, из семейства оценок (4) требуется выбрать наилучшую (в смысле оракульного неравенства) оценку. Для этого минимизируем эмпирическую квадратическую ошибку

$$Err_p(\gamma) = \sum_{j=1}^p \gamma^2(j) \theta_{j,p}^{*2} - 2 \sum_{j=1}^p \gamma(j) \theta_{j,p}^* \bar{\theta}_{j,p} + \|S\|^2.$$

Так как среднее слагаемое является невычислимым, сделаем следую-

щую замену  $\tilde{\theta}_{j,p} = \theta_{j,p}^* \hat{\theta}_{j,p} - \frac{\hat{\sigma}_n}{n}$ , где

$$\hat{\sigma}_n = \sum_{j=\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1}^n \hat{t}_{j,n}^2, \quad \hat{t}_{j,n} = \int_0^1 \varphi_j(t) dy_t.$$

Определим платежную функцию для  $0 < \delta < 1$ :

$$J_p(\gamma) = \sum_{j=1}^p \gamma^2(j) \theta_{j,p}^{*2} - 2 \sum_{j=1}^p \gamma^2(j) \tilde{\theta}_{j,p} + \delta P_n(\gamma),$$

где  $P_n(\gamma) = \frac{\hat{\sigma}_n |\gamma|_n^2}{n}$ . Полагая  $\gamma^* = \arg \min_{\gamma \in \Gamma} J_p(\gamma)$ , приходим к процедуре выбора модели

$$S^* = S_{\gamma^*}^*. \quad (5)$$

Предложенная процедура выбора модели является оптимальной в следующем смысле.

**Теорема 2.** Пусть в модели (1) сигнал  $S$  – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда для любых  $n \geq 3$  и  $1 < \rho < 1/2$  робастный среднеквадратический риск процедуры (5) удовлетворяет следующему оракульному неравенству:

$$R_Q^*(S^*, S) \leq \frac{1-5\rho}{1-\rho} \min_{\gamma \in \Gamma} R_Q^*(S_\gamma^*, S) + \frac{U_n}{\rho n},$$

где остаточное слагаемое  $U_n$  такое, что для любого  $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{n^\delta} = 0.$$

### Численное моделирование

Далее рассмотрим результаты численного сравнения эмпирических среднеквадратических рисков предложенной улучшенной оценки и оценки МНК. Моделирование проводилось в среде MatLab. Предположим, что в модели (1) сигнал  $S$  определен на отрезке  $[0, 1]$  и имеет следующий вид:

$$S(t) = t \sin(2\pi t) + t^2(1-t) \cos(4\pi t),$$

а шум  $\xi_t$  моделируется процессом

$$d\xi_t = -\xi_t dt + 0.5d\omega_t + 0.5dz_t, \quad z_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j,$$

где  $N_t$  – однородный пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda = 1$  и  $(Y_j)_{j \geq 1}$  – последовательность н.о.р. из  $\mathcal{N}(0, 1)$  (см., например, [2]). Для вычисления процедуры выбора модели (5) параметр  $\rho = (3 + \ln 2)^{-2}$ . Эмпирические среднеквадратические риски рассчитываются по приближенной формуле

$$\tilde{R}(S^*, S) = \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p \hat{\mathbf{E}} \Delta_n^2(t_j) \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{E}} \Delta_n^2(t_j) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \Delta_{n,l}^2(t), \quad (6)$$

где  $\Delta_n(t) = S_n^*(t) - S(t)$  и  $\Delta_{n,l}(t) = S_{n,l}^*(t) - S(t)$  – разница, вычисленная по  $l$ -й реализации выборки. При этом  $N = 1000$ , а  $p = 10001$ .

В таблице приведены значения для рисков улучшенной процедуры оценивания (5) и процедуры выбора модели на основе взвешенных оценок МНК из [2] для разных чисел периодов наблюдений  $n$ . Видно, что риск предложенной процедуры меньше, чем для процедуры, которая основана на методе наименьших квадратов. При этом точность оценивания в разы лучше. Также отметим, что риски с ростом  $n$  стремятся к нулю, т.е. улучшенный подход для процедуры выбора модели следует использовать для ограниченного числа наблюдений.

**Эмпирические среднеквадратические риски предложенной оценки и оценки МНК функции  $S$**

$n$	100	200	500	1000
$\tilde{R}(S_{\gamma}^*, S)$	0.0819	0.0319	0.0098	0.0051
$\tilde{R}(S_{\gamma}^*, S)$	0.0787	0.0479	0.0098	0.0178
$\tilde{R}(S_{\gamma}^*, S) / \tilde{R}(S_{\gamma}^*, S)$	0.9	1.1	3.6	6.2

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barbu V., Beltaief S., and Pergamenshchikov S.M.* Robust adaptive efficient estimation for semi-Markov nonparametric regression models // *Statistical Inference for Stochastic Processes*. 2019. V. 22. Iss. 2. P. 187–231.
2. *Konev V.V., Pergamenshchikov S.M.* Robust model selection for a semimartingale continuous time regression from discrete data // *Stochastic Processes and their Applications*. 2015. V. 125. P. 294–326.
3. *Konev V., Pergamenshchikov S., Pchelintsev E.* Estimation of a regression with the pulse type noise from discrete data // *Theory Probab. Appl.* 2014. V. 58. Iss. 3. P. 422–457.
4. *Pchelintsev E., Pergamenshchikov S.* Oracle inequalities for the stochastic differential equations // *Stat. Inference Stoch. Process*. 2018. V. 21. Iss. 2. P. 469–483.
5. *Pchelintsev E., Pergamenshchikov S.* Adaptive model selection method for a conditionally Gaussian semimartingale regression in continuous time // *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2019. No. 58. P. 14–31.
6. *Pchelintsev E.A., Pchelintsev V.A., Pergamenshchikov S.M.* Improved robust model selection methods for a Levy nonparametric regression in continuous time // *J. Nonparametric Statistics*. 2019. V. 31. Iss. 3. P. 612–628.

---

**Повзун** Мария Анатольевна, мл. науч. сотр. международной лаборатории статистики случайных процессов и количественного финансового анализа; povzunyasha@gmail.com

**Пчелинцев** Евгений Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа и теории функций; evgen-pch@yandex.ru

# Усвоение данных наблюдений при моделировании с помощью модели WRF\*

А.И. Сваровский, А.А. Барт, А.В. Старченко

*Национальный исследовательский  
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Улучшить точность прогнозов, получаемых с помощью математических моделей, можно за счет трех факторов: использование более детального описания процессов, использование как можно большего количества данных и высокоточных численных методов. Все большую популярность набирает подход, когда в модель передается максимально доступный объем разнотипных данных измерений и по мере выполнения расчетов выполняется коррекция расчетов данными измерений. В мировой практике такие задачи называют задачами ассимиляции (усвоения) данных, а методику корректировки – nudging. Рассматривается модель WRF (Weather Research and Forecasting), которая является одной из наиболее универсальных и современных систем моделирования атмосферы. В состав системы входит основное ядро (ARW), препроцессор (WPS) и модуль усвоения данных (WRFDA). В качестве данных измерений используются данные, полученные с помощью приборов ЦКП «Атмосфера»: профили температуры, профили скорости и направления ветра, ряда характеристик турбулентности.

**Ключевые слова:** *усвоение данных, WRF, nudging.*

Модель WRF (Weather Research and Forecasting) является одной из наиболее универсальных и современных систем моделирования атмосферы. Являясь свободно распространяемым программным продуктом, она широко и успешно используется для метеорологического прогнозирования в научных центрах и метеослужбах различных стран и продолжает непрерывно развиваться. Как эффективный инструмент решения многих задач физики атмосферы модель используется в исследовательских целях: мониторинге загрязнения атмосферы, изучении климата, моделировании разнообразных мезомасштабных явлений. Модель основана на численном решении системы уравнений гидротермодинамики атмосферы с учетом процессов в верхнем слое суши или воды.

---

\* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-71-20042).

Процессы подсеточного масштаба учитываются с помощью параметризаций. В модели WRF может быть использовано большое количество схем параметризаций физических процессов, которые можно комбинировать [1].

Целью работы является создание программной компоненты для записи данных измерений в формат, принимаемый WRFDA, и выполнение серии расчетов с целью оценки улучшения получаемых с использованием методики nudging прогнозов.

### Структура модели

На рис. 1. показана структура модели WRF:

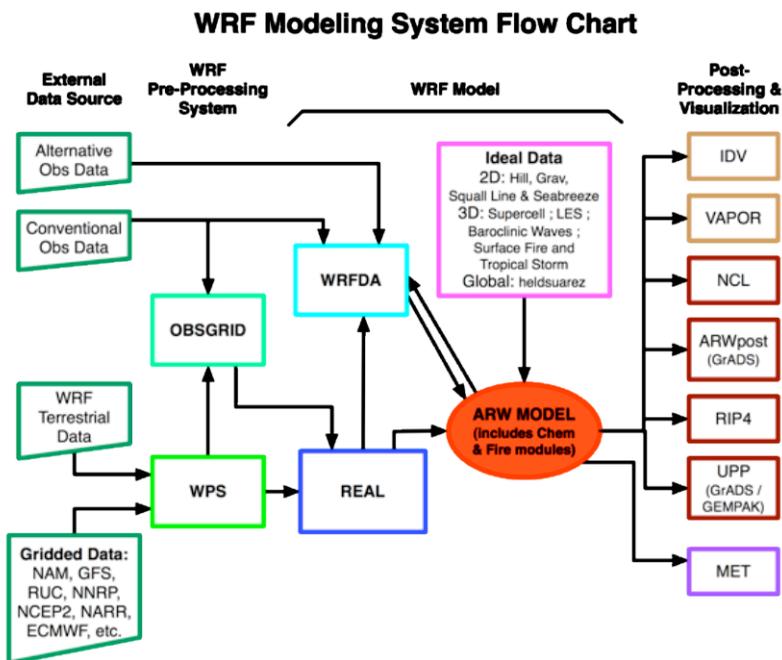


Рис. 1. Общая схема взаимодействия элементов модели WRF версии 3

Первая часть программного блока – WRF Preprocessing System (WPS) – занимается предварительной обработкой (подготовкой), приведением данных к нужному формату. WPS состоит из трех программ, каждая из которых выполняет один этап подготовки:

- Geogrid – определяет области моделирования и интерполирует статические географические данные в узлы сетки;
- Ungrib – извлекает метеорологические поля из файлов формата GRIB;
- Metgrid – горизонтально интерполирует извлеченные Ungrib метеорологические поля в заданную Geogrid сетку.

Модель позволяет проводить расчеты как с реальными данными – за что отвечает блок Real – так и с «идеальными» случаями (блок Ideal). Блок Real инициализирует начальные данные, производит вертикальную интерполяцию, «заготавливает» граничные условия для сетки на срок прогноза. На рис. 2 изображена схема взаимодействия элементов блока WPS [2]:

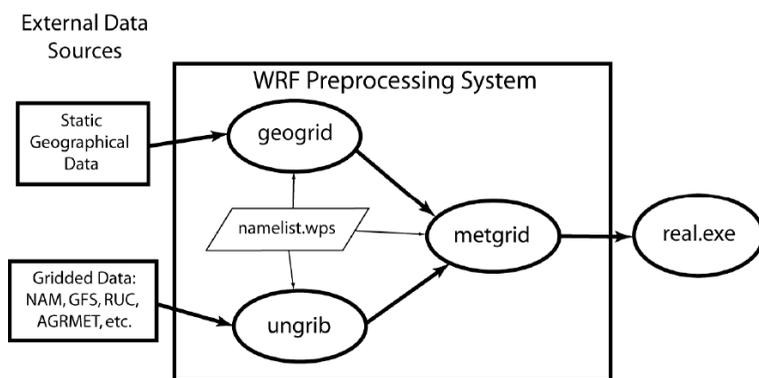


Рис. 2. Схема взаимодействия элементов системы предварительной обработки данных (WPS WRF)

После использования Real может быть подключен блок WRF Data Assimilation (WRFDA). WRFDA – это блок трехмерного вариационного усвоения данных наблюдений (для обычных, спутниковых и радиолокационных наблюдений).

Далее следует собственно динамическое ядро модели – ARW (Advanced Research), осуществляющее все вычисления и подключающее указанные на входе необходимые параметры.

После успешного выполнения программы динамического ядра формируются выходные файлы, которые могут быть визуализированы при помощи вспомогательных программных средств.

## Основные уравнения ARW

### Вертикальная координата и переменные

Динамическое ядро ARW интегрирует негидростатические уравнения Эйлера. Уравнения ARW формулируются с использованием вертикальной координаты гидростатического давления, следующей за рельефом местности, обозначенной  $\eta$  и определяемой как

$$\eta = \frac{p_h - p_{ht}}{\mu}, \quad \text{где } \mu = p_{hs} - p_{ht}.$$

Здесь  $p_h$  – гидростатическая составляющая давления, а  $p_{hs}$  и  $p_{ht}$  относятся к значениям вдоль поверхности и верхних границ соответственно;  $\eta$  изменяется от значения 1 на поверхности до 0 на верхней границе модельной области (рис. 3). Это вертикальная координата, которая также называется массовой вертикальной координатой.

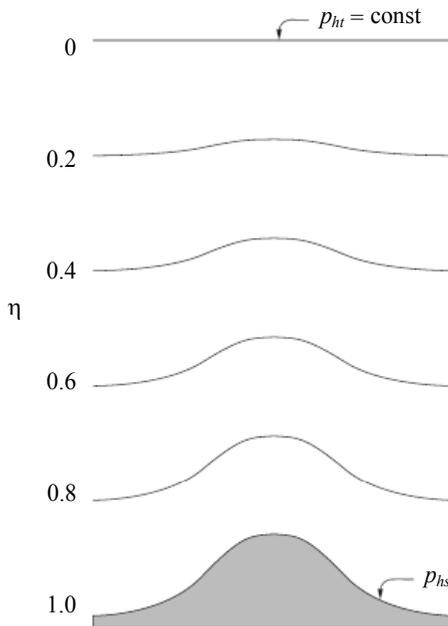


Рис. 3. ARW,  $\eta$  – координата

Поскольку  $\mu(x, y)$  представляет массу на единицу площади в столбце в области модели в точке  $(x, y)$ , то соответствующие переменные

$$\vec{V} = \mu \vec{v} = (U, V, W), \Omega = \mu \eta, \Theta = \mu \theta,$$

где  $\vec{v} = (u, v, \omega)$  – вектор скорости в двух горизонтальных и вертикальных направлениях соответственно;  $\omega = \eta$  – «вертикальная» скорость, а  $\theta$  – потенциальная температура воздуха. В определяющих уравнениях ARW также фигурируют неконсервативные переменные:  $\phi = gz$  – геопотенциал,  $p$  – давление, и  $\alpha = \frac{1}{\rho}$  – обратная плотность.

### **Уравнения модели WRF**

Используя переменные, определенные выше, основные уравнения модели WRF можно записать в виде

$$\partial_t U + \left( \nabla \cdot \vec{V} u \right) - \partial_x (p \phi_{\eta}) + \partial_{\eta} (p \phi_x) = F_U ; \quad (1)$$

$$\partial_t V + \left( \nabla \cdot \vec{V} v \right) - \partial_y (p \phi_{\eta}) + \partial_{\eta} (p \phi_y) = F_V ; \quad (2)$$

$$\partial_t W + \left( \nabla \cdot \vec{V} \omega \right) - g (\partial_{\eta} p - \mu) = F_W ; \quad (3)$$

$$\partial_t \Theta + \left( \nabla \cdot \vec{V} \theta \right) = F_{\Theta} ; \quad (4)$$

$$\partial_t \mu + \left( \nabla \cdot \vec{V} \right) = 0 ; \quad (5)$$

$$\partial_t \phi + \mu^{-1} \left[ \left( \vec{V} \cdot \nabla \phi \right) - g W \right] = 0 \quad (6)$$

наряду с диагностическим соотношением для обратной плотности

$$\partial_{\eta} \phi = - \alpha \mu \quad (7)$$

и уравнением состояния

$$p = p_0 (R_d \theta / p_0 \alpha)^\gamma = - \alpha \mu . \quad (8)$$

В (1) – (8), индексы  $x, y$  и  $\eta$  обозначают дифференцирование,

$$\nabla \cdot \vec{V} a = \partial_x (Ua) + \partial_y (Va) + \partial_\eta (\Omega a),$$

и

$$\vec{V} \cdot \nabla a = U \partial_x a + V \partial_y a + \Omega \partial_\eta a,$$

где  $a$  – обобщенная переменная;  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$  – отношение теплоемкостей для сухого воздуха;  $R_d$  – газовая постоянная для сухого воздуха;  $p_0$  является эталонным давлением (обычно  $10^5$  Па). Правосторонние члены  $F_U, F_V, F_W$  и  $F_\Theta$  представляют собой источниковые члены, возникающие из модельной физики, турбулентного перемешивания, сферических проекций и вращения Земли [3].

### Методика Nudging

Nudging (подтягивание), или ньютоновская релаксация, в основном используется для моделирования погоды в глобальном масштабе, хотя она уже применяется в моделях для ограниченных областей. Результаты ее применения демонстрируют гибкость этого подхода: данные для ньютоновской релаксации могут быть разных типов (измеренные и рассчитанные), полученные из анализа на сетке для ассимиляции в модель или вставленные в виде отдельных наблюдений. Сеточный анализ ассимилированных наблюдений может быть получен из последовательной коррекции, метода вариации или статистической оптимальной интерполяции с применением различных весовых коэффициентов. На практике Nudging – это подход последовательной коррекции, который используется в численной модели для включения в анализ временных измерений для наблюдений. Первоначально nudging была разработана для инициализации динамических атмосферных моделей, которые использовались до прогнозного периода, чтобы создать хорошо сбалансированные начальные условия для модели для выполнения численного прогнозирования [4].

В модели WRF это реализовано как

$$\frac{\partial q \mu}{\partial t}(x, y, z, t) = F_q(x, y, z, t) + \mu G_q \frac{\sum_{i=1}^N W_q^2(i, x, y, z, t) [q_0(i) - q_m(x_i, y_i, z_i, t)]}{\sum_{i=1}^N W_q^2(i, x, y, z, t)},$$

где  $q$  – величина подтягивания,  $\mu$  – сухое гидростатическое давление;  $F_q$  представляет собой члены физической тенденции  $q$ ;  $G_q$  – сила подтягивания для  $q$ ;  $N$  – общее количество наблюдений;  $i$  – индекс текущего наблюдения;  $W_q$  – пространственно-временная весовая функция, основанная на временном и пространственном разделении между наблюдением и текущим местоположением модели;  $q_0$  – это наблюдаемое значение  $q$ ;  $q_m(x_i, y_i, z_i, t)$  – значение модели  $q$ , интерполированное к месту наблюдения. Величина  $q_0 - q_m$  – инновация (новшество); инновация, связанная с данным наблюдением, развивается со временем (как до, так и после времени наблюдения) по мере развития значения модели  $q_m$ . Таким образом, когда значение модели приближается к наблюдаемому значению, член тенденции к подтягиванию уменьшается.

### Формат данных и данные

Данные наблюдений, которые используются в методике Nudging, перед тем как поступают для обработки в модель WRF, предварительно обрабатываются утилитой для объективного анализа OBSGRID (входит в состав WRF). Она читает наблюдения, предоставленные пользователем, в файлах формата LITTLE\_R. В LITTLE\_R наблюдения организованы в виде отчетов. Отчет состоит из одного наблюдения или набора наблюдений, связанных с одной координатой широты / долготы. Каждый отчет в формате наблюдений LITTLE\_R состоит как минимум из четырех записей: записи заголовка отчета, одной или нескольких записей данных, записи конца данных и конечной записи отчета [2].

В дальнейшем в работе в качестве данных наблюдений будут использоваться данные измерений приборов ЦКП «Атмосфера», которые представляют собой профили температуры, скорости и направления ветра [5].

### Результаты предварительных расчетов

В результате запуска модели WRF без методики Nudging были получены результаты численного прогноза для профилей температуры, скорости и направления ветра для станции TOR (Академгородок, г. Томск) за период 2–9 августа 2019 года. Для расчетов использовались глобальные данные модели GFS (Global Forecast System).

Качество прогноза оценивалось по среднеквадратической ошибке (результаты приведены в таблице):

$$\varepsilon_k = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (x_f - x_{obs})^2},$$

где  $x_f$  – прогнозируемое значение метеорологической величины;  $x_{obs}$  – соответствующее наблюдаемое значение.

#### Оценка качества численного прогноза за период 2–9 августа 2019 г. для станции ИОА СО РАН

Тип данных	Метеопараметр	Минимум $\varepsilon_k$	Максимум $\varepsilon_k$
Time series (временные ряды)	Температура воздуха, °C	1.3	3.58
	Скорость ветра, м/с	0.9	1.71
	Направление ветра, град	20.82	129.5
Point (зондирование)	Температура воздуха, °C	0.17	6.21
	Скорость ветра, м/с	0.34	2.96
	Направление ветра, град	9	200.6

### Визуализация результатов

С использованием скриптов, написанных на языке программирования Python, построены графики расчетов и наблюдений. Примеры графиков приведены на следующих рисунках:

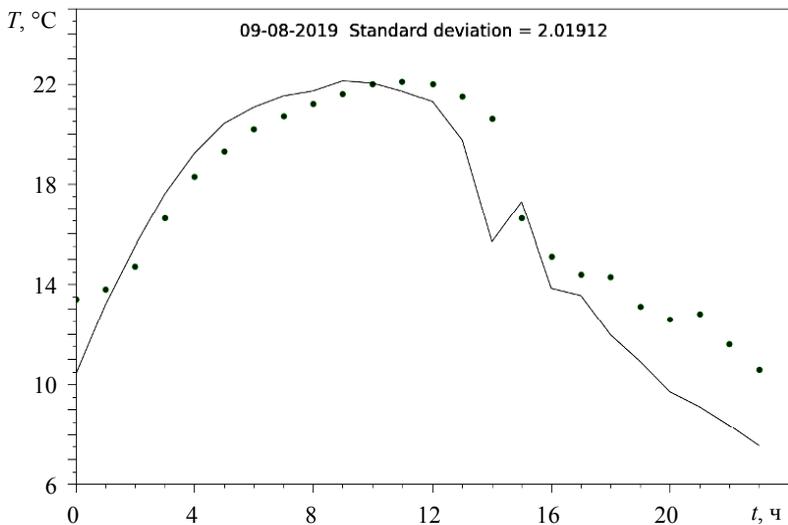


Рис. 4. График температуры воздуха (станция ИОА СО РАН) по данным time series: сплошная линия – расчеты, круги – наблюдения.

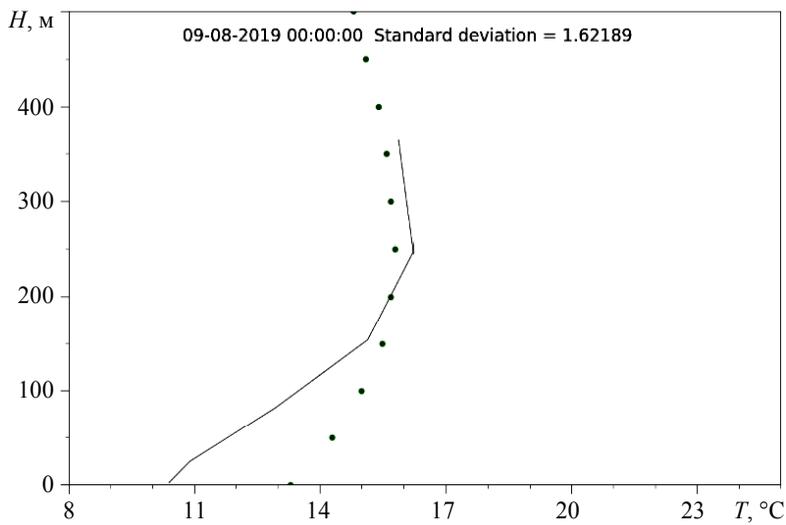


Рис. 5. График температуры воздуха (станция ИОА СО РАН) по данным point: сплошная линия – расчеты, круги – наблюдения

## Заключение

Таким образом, на данный момент изучен принцип работы модели WRF и методики Nudging; проведены расчеты по модели WRF без применения данной методики; выполнена оценка качества численного прогноза и построены графики.

В дальнейшем будет создана программная компонента для записи данных измерений в формат, принимаемый WRFDA; выполнена серия расчетов с целью оценки улучшения, получаемых с использованием методики nudging прогнозов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кижнер Л.И., Нахтигалова Д.П., Барт А.А.* Использование прогностической модели WRF для исследования погоды Томской области // Вестн. Том. гос. ун-та. 2012. № 358. С. 219–224.
2. ARW Version 3 Modeling System User's Guide // NCAR. URL: [https://www2.mmm.ucar.edu/wrf/users/docs/user\\_guide\\_V3/ARWUsersGuideV3.pdf](https://www2.mmm.ucar.edu/wrf/users/docs/user_guide_V3/ARWUsersGuideV3.pdf) (дата обращения: 20.03.2020).
3. *Skamarock W.C., Klemp J.B., Dudhia J., Gill D.O., Barker D.M.* A Description of the Advanced Research WRF Version 3. NCAR technical note NCAR/TN-475+STR, 2008.
4. *Starchenko A.V., Bart A.A.* Global meteorological forecast data and instrumental measurement application for simulation of mesoscale atmospheric boundary layer processes // 22nd International Symposium Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics, edited by Gennadii G. Matvienko, Oleg A. Romanovskii. Proc. of SPIE. V. 10035, 1003571. DOI: 10.1117/12.2249306.
5. *Отчет о выполнении хозяйственного договора «Проведение измерений метеорологических параметров с использованием оборудования Центра коллективного пользования «Атмосфера» ИОА СО РАН вблизи г. Томска».* Томск: ИОА СО РАН, 2019. 41 с.

---

**Сваровский** Артем Игоревич, программист научно-исследовательской лаборатории вычислительной геофизики ТГУ; [svarart@yandex.ru](mailto:svarart@yandex.ru)

**Барт** Андрей Андреевич, к.ф.-м.н., ст. науч. сотр. РМЦ ТГУ

**Старченко** Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой вычислительной математики и компьютерного моделирования ММФ ТГУ

# Построение структурированных сеток

Е.А. Синишина, В.Д. Гольдин

*Национальный исследовательский  
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Приводятся краткие характеристики трех классов сеток: структурированных, неструктурированных и гибридных. Более подробно описывается класс структурированных сеток. Рассматриваются следующие методы построения структурированных сеток: алгебраические методы, методы конформных отображений и методы, основанные на решении уравнений в частных производных. Приводятся описания каждой из групп этих методов, а также демонстрируются примеры построения структурированных сеток с применениями некоторых из них.

**Ключевые слова:** *структурированные сетки, неструктурированные сетки, узлы сетки, методы построения сеток, триангуляция, алгебраические методы, конформные отображения, преобразование Шварца – Кристоффеля, функции растяжения, трансфинитная интерполяция, уравнение Пуассона, параметры сетки.*

Для решения различных задач, связанных с математической физикой, зачастую требуются численные решения дифференциальных уравнений в частных производных. Для этого необходимо заменять непрерывное физическое пространство на дискретное его разбиение, то есть сетку. Непрерывное изменение аргумента заменяется на дискретное изменение аргумента.

*Сетка* – это совокупность ячеек, которые являются подобластями исходной области со сложной геометрией и покрывают всю область. В каждой ячейке сетки выбирается одна или несколько точек, так называемые *узлы сетки*.

Выделяют три класса сеток: структурированные, неструктурированные и гибридные [1].

## Структурированные сетки

На рис. 1 представлены простейшие примеры *структурированных сеток* в двумерном и трехмерном случаях соответственно. В общем же случае структурированная сетка топологически эквивалентна равномерной сетке в прямоугольной области для двумерного случая и равномерной сетке в кубе для трехмерного [1]. В двумерном случае ячейки

являются четырехугольниками, а в трехмерном – шестигранниками. У структурированных сеток множество сеточных узлов является упорядоченным. Вычисления на структурированных сетках производятся быстрее. Например, на них сравнительно легко реализуются метод конечных разностей или метод конечных объемов. Данный класс сеток требует меньше оперативной памяти, ввиду отсутствия необходимости хранить дополнительную информацию о геометрии каждой ячейки. Однако, само построение сеток может вызывать некоторые трудности.

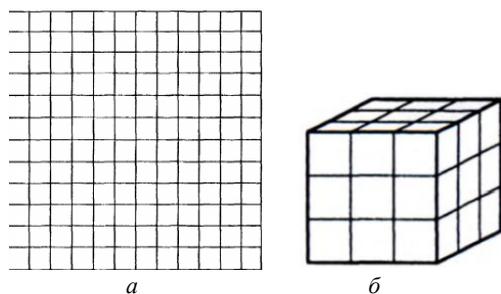


Рис. 1. Примеры структурированных сеток

Структурированные сетки не обязательно строятся в привычной евклидовой системе координат. Построения можно осуществлять так же и с помощью криволинейных координат (например, цилиндрических или сферических), как показано на рис. 2.

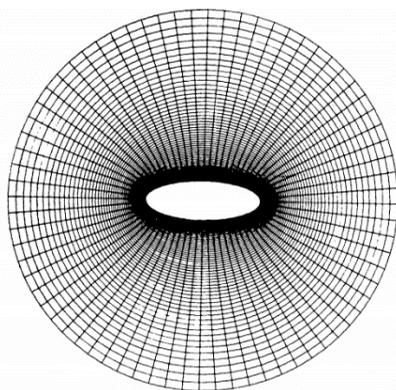


Рис.2. Структурированная сетка в криволинейной системе координат

## Неструктурированные сетки

В области со сложной геометрией зачастую трудно, а иногда и попросту невозможно построить структурированную сетку. Тогда для проведения вычислений используются *неструктурированные сетки* (рис. 3). Для неструктурированных сеток характерно нерегулярное расположение сеточных узлов, а также произвольная форма и расположение самих ячеек сетки – в том числе ячейки могут пересекаться [1]. Чаще всего в двумерном случае в качестве ячеек сетки используются треугольники, а в трехмерном – тетраэдры [2]. Преимущество использования данного класса сеток в их гибкости при дискретизации физической области сложной формы. Также в качестве достоинства неструктурированных сеток можно выделить более легкий способ алгоритмизации генерации сетки, что во многом обуславливает распространенность использования данного класса на практике. Но недостаток неструктурированных сеток заключается в том, что требуется дополнительный объем памяти для хранения информации о связях ячеек сетки.

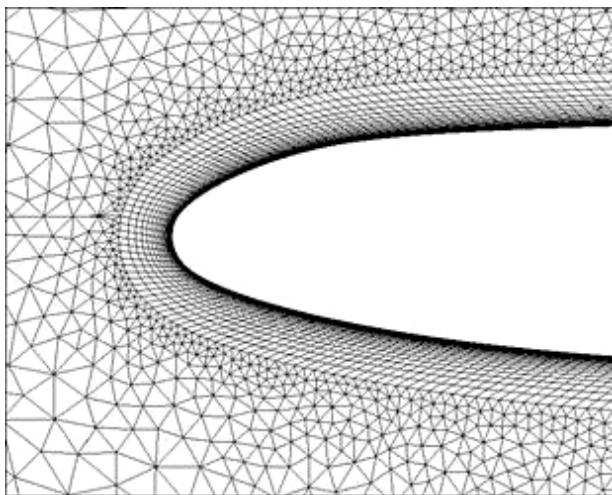


Рис. 3. Пример неструктурированной сетки

*Теорема о существовании триангуляции многоугольника* гласит, что у любого простого  $n$ -вершинного многоугольника  $P$  всегда существует триангуляция, причем наименьшее количество треугольников в ней равняется  $n - 2$  [3].

*Гибридные* сетки представляют собой композицию структурированных и неструктурированных сеток.

### Методы построения сеток

Методы построения сеток можно поделить на *стационарные* и *адаптивные*, то есть подстраивающиеся под решение исходного дифференциального уравнения. Здесь мы рассмотрим стационарные методы, которые в свою очередь условно делятся на алгебраические методы, методы теории функций комплексного переменного и методы, основанные на решении уравнений в частных производных.

### Алгебраические методы

Для построения сетки методом алгебраических отображений используются функции  $R^1$ ,  $R^2$  или  $R^3$ , переводящие физическую область произвольной формы в вычислительную область, чаще всего представляющую отрезок, прямоугольник или куб соответственно.

Распределение точек сетки внутри области осуществляется в основном за счет *функций растяжения* на границах [4].

Преимущество данных методов в том, что метрические коэффициенты можно вычислить аналитически, а сам метод применим к трехмерному случаю. Недостаток же алгебраических методов в трудности контроля за сеточными линиями внутри области, что может вызвать скос сеточных линий.

Ниже приведена общая схема построения структурированной сетки. Заданная двумерная физическая область (рис. 4, *а*) с помощью алгебраического биективного отображения  $f$  переводится в вычислительную область в виде прямоугольника (рис. 4, *б*). Далее на этом прямоугольнике строится равномерная сетка (рис. 4, *в*). С помощью обратного отображения  $f^{-1}$  полученная сетка переносится обратно на физическую область (рис. 4, *г*).

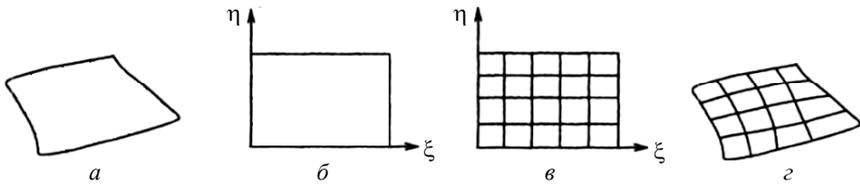


Рис. 4. Иллюстрация общей схемы построения сеток в случае  $R^2$

Приведем пример построения сетки в произвольном четырехугольнике [5]. Пусть исходная область представляет произвольный четырехугольник с вершинами 1, 2, 3, 4.

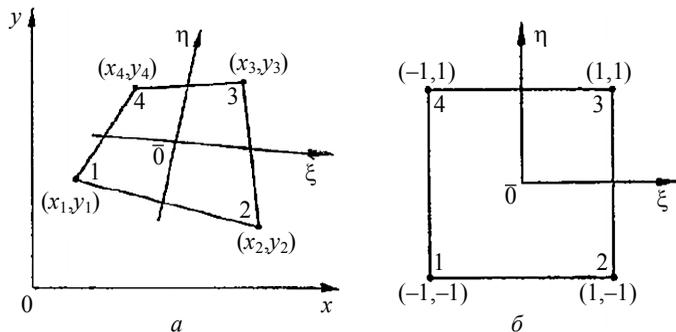


Рис. 5. Типичный четырехугольный элемент:  
 $a$  – глобальные и локальные координаты,  $b$  – естественные координаты

Рис. 5 иллюстрирует то, как квадрат может быть сформирован из четырехугольника путем преобразования из глобальных координат в естественные. Связь между естественными  $(\xi, \eta)$  и глобальными  $(x, y)$  координатами определяется формулами

$$x = \frac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta)x_1 + (1+\xi)(1-\eta)x_2 + (1+\xi)(1+\eta)x_3 + (1-\xi)(1+\eta)x_4];$$

$$y = \frac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta)y_1 + (1+\xi)(1-\eta)y_2 + (1+\xi)(1+\eta)y_3 + (1-\xi)(1+\eta)y_4].$$

### Одномерные функции растяжения

На качество сетки внутри области может оказывать влияние построение сетки на ее границе. То есть в двумерном случае на распределение узлов внутри области можно повлиять, производя разбиение на границе области. Для построения сетки на граничных линиях области часто используются функции растяжения. Как правило, функции растяжения задаются алгебраически, поэтому их можно отнести к категории алгебраических методов.

Введем одномерное растяжение на  $AE$  (рис. 6). Пусть линия задана в виде функции от параметра  $\eta$ . Будем считать, что  $\eta$  – длина дуги.

Переменные в функции растяжения, применяемой к  $EA$ , приводятся к нормализованному виду [4]

$$\eta^* = (\eta - \eta_A) / (\eta_E - \eta_A), \text{ то есть } 0 \leq \eta^* \leq 1 \text{ при } \eta_A \leq \eta \leq \eta_E.$$



Рис. 6. Отрезок  $AE$

В качестве примера рассмотрим функцию растяжения, предложенную Робертсом [6] и модифицированную Эйзенманом:

$$s = P\eta^* + (1 - P) \left( 1 - \frac{th(Q(1 - \eta^*))}{thQ} \right),$$

где  $P$  и  $Q$  – параметры, обеспечивающие контроль распределения точек сетки,  $P$  фактически определяет производную  $\frac{\partial s}{\partial \eta^*}$  вблизи  $\eta^* = 0$ . Величина  $Q$  – демпфирующий фактор, определяющий отклонение от линейной зависимости  $s$  от  $\eta^*$ .

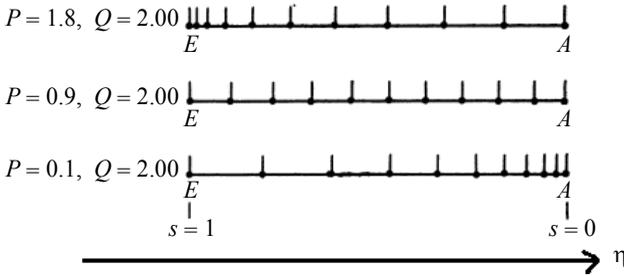


Рис. 7. Распределение координат сеточных узлов на отрезке  $EA$  при различных значениях  $P$  и  $Q$

Полученная величина  $s$  используется для определения распределения координат сеточных узлов  $x$  и  $y$ . Например, пусть в переменных  $s$  построена сетка  $s_i$ . Тогда в физической области этим точкам будет соответствовать  $x_i$  и  $y_i$ , вычисляемые по следующим формулам:

$$x = x_A + s(x_E - x_A), \quad y = y_A + s(y_E - y_A)$$

## Метод двух поверхностей

Рассмотрим применение метода двух поверхностей на примере построения сетки в двумерном искривленном канале [4].

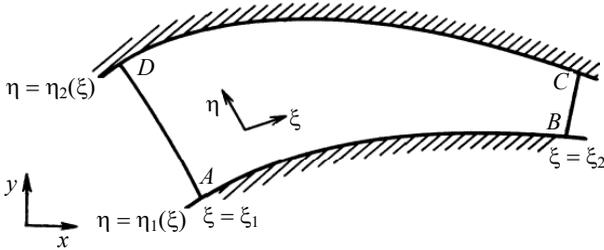


Рис. 8. Двумерный искривленный канал

Одномерные функции растяжения  $s_{AD}(\eta^*)$  и  $s_{BC}(\eta^*)$  получаются по формулам, аналогичным формулам предыдущего пункта. В качестве координат в этом канале вбираются  $\xi$  и  $\eta$ ;  $\xi$  — длина дуги вдоль отрезка  $AB$  до определенной точки, а  $\eta$  — расстояние вдоль линии  $\xi = \text{const}$ . Эта линия получается соединением соответствующих точек на  $AB$  и  $CD$ , задаваемых функциями  $r_{AB}, r_{DC}$ .

Для получения  $s$  между  $AD$  и  $BC$  может быть проведена простая линейная интерполяция:  $s = s_{AD} + \xi^*(s_{BC} - s_{AD})$ , где  $\xi^* = (\xi - \xi_1)/(\xi_2 - \xi_1)$ . Аналогично строятся одномерные функции растяжения  $r_{AB}(\xi^*)$  и  $r_{DC}(\xi^*)$  для точек сетки вдоль границ  $AB$  и  $DC$ .

Применение метода алгебраического отображения для случая двух границ заключается в том, что проводится интерполяция между границами  $AB$  и  $DC$ . Простейшая интерполяция может быть проведена по формулам

$$x(\xi, \eta) = (1-s)x_{AB}(r_{AB}) + sx_{DC}(r_{DC});$$

$$y(\xi, \eta) = (1-s)y_{AB}(r_{AB}) + sy_{DC}(r_{DC}).$$

При использовании способа, описанного выше, нет гарантии того, что сетка получится ортогональной. Добиться этого можно путем введения дополнительных поверхностей.

## Метод многих поверхностей

Дополнительный контроль распределения внутренних точек сетки может быть получен путем введения между поверхностями  $AB$  и  $CD$  промежуточных поверхностей, на которых определены зависимости  $x_j(r_j)$  и  $y_j(r_j)$  [4]. Если соединить соответствующие точки соседних поверхностей, то будет определена последовательность направлений, интерполируемая в ходе данного метода. Метод многих поверхностей позволяет добиться локальной ортогональности сетки на границе.

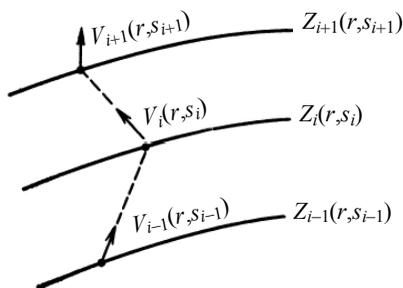


Рис. 9. Последовательность промежуточных поверхностей  $Z_i$  и касательных векторов  $V_i$

В двумерном случае распределение точек на  $i$ -й поверхности представляется в виде одной векторной функции  $Z_i(x_i(r), y_i(r))$ . Параметр  $r$  определяет положение всех точек поверхности. Точки  $(x_i(r), y_i(r))$  на различных поверхностях, соответствующие одному значению параметра  $r$ , соединяются отрезками прямых. Сетка в промежутках между поверхностями строится аналогично тому, как это проделывалось в предыдущих пунктах.

На рис.10, *a* изображен пример сетки при  $N = 2$ , то есть промежуточных поверхностей нет. Сетка не ортогональна ни одной из граничных поверхностей.

На рис. 10, *б* дан пример сетки при  $N = 3$ , то есть имеется одна промежуточная поверхность. Полученная сетка локально ортогональна поверхности эллипса.

На рис. 10, *в* приведен пример сетки при  $N = 4$ , то есть введены две промежуточные поверхности. Сетка получилась ортогональна обеим граничным поверхностям [4].

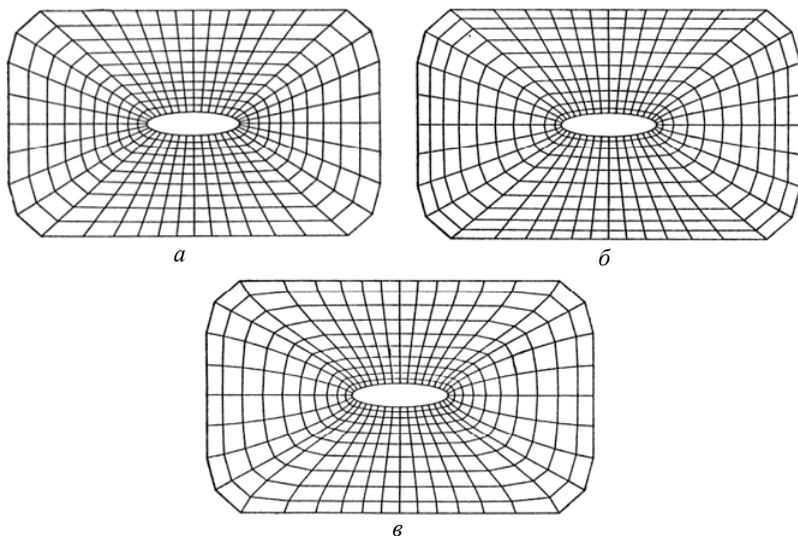


Рис. 10. Пример сетки при различном количестве промежуточных поверхностей

### Трансфинитная интерполяция

При помощи трансфинитной интерполяции можно определить непрерывные отображения  $Z_{AB}(\xi, \eta_1)$  на  $AB$ ,  $Z_{DC}(\xi, \eta_2)$  на  $DC$  и, кроме того,  $Z_{AD}(\xi_1, \eta)$  на  $AD$  и  $Z_{BC}(\xi_2, \eta)$  на  $BC$ . Внутри области вводится интерполяция как по  $\xi$ , так и по  $\eta$ , или, что эквивалентно, по  $r$  и по  $s$  [4].

### Конформные отображения

В двумерном случае можно применить метод конформных отображений. Метод заключается в том, что двумерная физическая область с помощью конформных отображений переводится в стандартную область, например прямоугольную. Там строится структурная сетка, например четырехугольная. В результате при обратном отображении в исходной области получаются линии, хоть и кривые, но ортогональные друг другу, так как *конформность сохраняет углы*. Конформное отображение, осуществляемое аналитическими функциями, запишем как

$w = f(z)$ . Разделив мнимую и действительную части, имеем  $\xi + i\eta = u(x, y) + iv(x, y)$ , то есть  $\xi = u(x, y)$ , а  $\eta = v(x, y)$ .  $u$  и  $v$  связаны условиями Коши – Римана [4]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Приведем в качестве примера преобразования Шварца – Кристоффеля [7], которое позволяет отобразить верхнюю полуплоскость  $\text{Im}(z) > 0$  в простой замкнутый многоугольник с вершинами  $a_k$  и углами  $\alpha_k \pi$ :

$$\omega = C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_1.$$

Граница многоугольника при этом совпадает в данной плоскости с вещественной осью.

На практике возможен следующий вариант применения этого метода. Многоугольник отображается на верхнюю полуплоскость с помощью обращения формулы Шварца, затем верхняя полуплоскость отображается на прямоугольник. Далее, после построения сетки в прямоугольнике совершаются преобразования, обратные к упомянутым, в результате получается сетка в многоугольнике.

В частности, при использовании преобразования Шварца – Кристоффеля для отображения внутренности единичного круга на внутренность многоугольника,  $\alpha_k \pi$  являются внутренними углами многоугольника,  $a_k$  ( $|a_k| = 1$ ) – точками единичной окружности, соответствующими вершинам многоугольника,  $C$  и  $C_1$  – некоторые константы.

Преимущество метода, основанного на применении функций комплексного переменного, в том, что выполняемые в нем преобразования являются аналитическими.

Существенным же недостатком использования методов конформных отображений является то, что они применимы только к двумерному случаю [8].

## Построение сеток на основе решения уравнений в частных производных

Для любых классов сеток преобразование от физической области к расчетной может быть осуществлено с помощью решения дифференциальных уравнений в частных производных.

### Построение ортогональных сеток

Ортогональные сетки могут быть получены из неортогональных путем построения ортогональных траекторий.

Рассмотрим процесс построения сетки для области, приведенной на рис. 12 [4]. Необходимо определить точки на трех сторонах области (например, на  $EA$ ,  $ABC$  и  $CD$ ), а на четвертой стороне ( $ED$ ) точки определяются ортогональными траекториями.

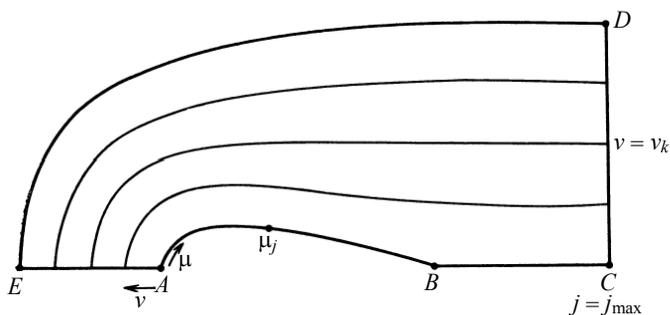


Рис. 12. Начальная конфигурация  
для построения ортогональных траекторий

Сначала определяется семейство кривых  $v_i$ . Положение точек вдоль каждой кривой семейства может быть определено с помощью преобразований сдвига. Например, следующим образом:

$$\vec{r} = (1 - \nu)\vec{r}_1(\tau) + \nu\vec{r}_2(\tau),$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор произвольной точки в области;  $\vec{r}_1(\tau)$ ,  $\vec{r}_2(\tau)$  – радиус-векторы точек на границах  $ABC$  и  $ED$  соответственно;  $\tau$  – некоторый параметр, задающий расположение точек на границах;  $\nu$  – параметр, задающий расположение кривой внутри области.

Для определения ортогональной сетки  $(\xi, \eta)$  требуется построить траектории, начинающиеся из точек  $\mu = \mu_j$ , и оканчивающиеся на границе  $ED$ . При этом данные траектории должны пересекать все промежуточные координатные линии  $v = v_k$  под прямым углом. В завершении построения сетки полагаем  $\eta_k = v_k$ . При этом линии  $\xi = const$ , являющиеся константами, ортогональны линиям  $\eta = const$ .

**Построение сеток, близких к ортогональным**

Построение ортогональных сеток зачастую может вызывать много трудностей. Гораздо проще строить сетки, близкие к ортогональным. Предположим, что, как в предыдущем пункте, семейство  $v_i$  построено (рис. 12). Возьмем на линии  $v_1$  точку  $\mu_j$  (рис. 13). Далее проводится нормаль к линии  $v_1$  до пересечения с линией  $v_2$ . В точке пересечения вычисляется  $y$ -компонента нормали  $-\frac{dx}{dy}\Big|_{v_2}$ . Точка пересечения сдвигается вдоль  $v_2$  до тех пор, пока опущенная из нее нормаль не пройдет через начальную точку  $(\mu_j, v_1)$ . Точка  $(\mu_j, v_2)$  берется посередине между точками пересечения. После определения всех точек на  $v_2$  аналогично получают точки на  $v_3$ . Процесс продолжается до тех пор, пока не достигается внешняя граница  $ED$  (рис. 12) [4].

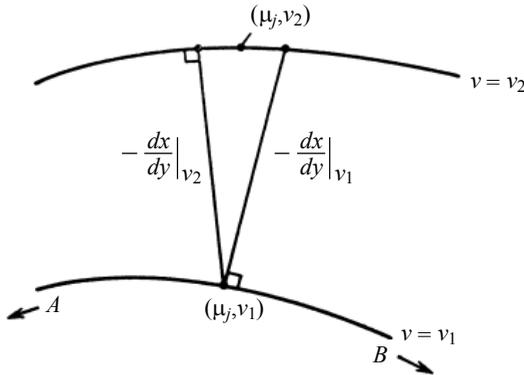


Рис. 13. Схема построения приближенно ортогональной сетки

## Решение эллиптических уравнений в частных производных

Наиболее общим примером уравнения в частных производных, используемом для построения сетки, является уравнение Пуассона, записанное в виде системы [4]

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta); \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta), \end{cases}$$

где  $P$  и  $Q$  – некоторые известные функции, используемые для контроля сгущения внутренних точек сетки. Отображение  $\xi(x, y), \eta(x, y)$ , которое определяется из приведенной выше системы, преобразует физическую область в прямоугольник. Оно должно быть взаимно однозначным, что приводит к некоторым ограничениям на задаваемые функции  $P$  и  $Q$ . Выполнение принципа экстремума [7] является достаточным, но не необходимым условием для взаимно однозначного отображения [9].

Отрицательные значения контрольной функции  $Q(\xi, \eta)$  приводят к тому, что линии  $\eta = const$  будут сдвигаться в сторону уменьшения  $\eta$ , а отрицательные значения функции  $P(\xi, \eta)$  приводят к тому, что линии  $\xi = const$  будут сдвигаться в сторону уменьшения  $\xi$  [9]. Это проиллюстрировано на рис. 14.

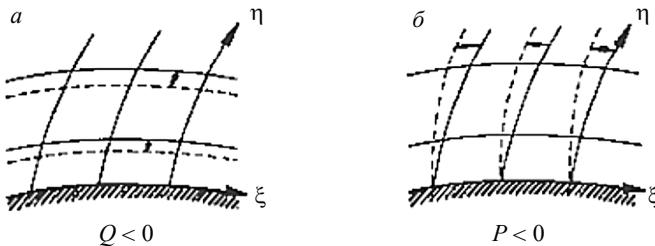


Рис. 14. Сетка при отрицательных значениях  $Q$  (а) и  $P$  (б)

В общем случае, отрицательное значение лапласиана одной из криволинейных координат приводит к тому, что линии, на которых эта ко-

ордината является постоянной, смещаются в направлении, в котором координата уменьшается. Положительные значения лапласиана приводят к обратному эффекту.

При использовании эллиптических уравнений сетка получается гладкой, даже если первоначальная поверхность имеет излом. В случае, если на  $P$  и  $Q$  вводятся ограничения, эллиптические уравнения удовлетворяют *принципу максимума*, т. е. максимальное и минимальное значения  $\xi$  и  $\eta$  достигаются на границе. Это обычно гарантирует однозначность отображения. Однако при некоторых экстремальных выборах  $P$  и  $Q$  возможно локальное самопересечение сетки.

Систему

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta); \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta) \end{cases}$$

можно обратить в уравнения для функций  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  [10]:

$$\begin{cases} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = -J^2 (Px_{\xi} + Qx_{\eta}); \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = -J^2 (Py_{\xi} + Qy_{\eta}), \end{cases}$$

где  $\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2$ ;  $\beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}$ ;  $\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2$ ;

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}.$$

### Параметры сетки. Качество сетки

Построенная сетка должна удовлетворять некоторым условиям [8]:

- Параметры сетки должны плавно изменяться.
- Сетка должна быть близка к ортогональной.
- Локальные отношения сторон должны быть близки к единице.
- Отображение, переводящее физическую область в расчетную, должно быть однозначным.
- Линии сетки должны быть гладкими, что обеспечивает непрерывность производных.

- Сетка должна быть достаточно густой в тех областях, где ожидается возникновение вычислительных ошибок.
- Следует избегать излишней скошенности ячеек сетки, что может приводить к ошибке аппроксимации.
- Разница в размерах между соседними ячейками не должна превышать 20 %.

Остановимся на том, как выявить излишнюю *скошенность* ячеек сетки, то есть насколько малы (велики) углы внутри ячейки. Степень скоса определяется следующей формулой:

$$\max \left[ \frac{\theta_{max} - \theta_e}{180 - \theta_e}, \frac{\theta_e - \theta_{min}}{\theta_e} \right],$$

где  $\theta_{max}$  – самый большой угол ячейки,  $\theta_{min}$  – самый малый угол ячейки, а  $\theta_e$  – угол в равносторонней фигуре (то есть для треугольника он составляет  $60^\circ$ , а для квадрата –  $90^\circ$ ) (рис. 15).

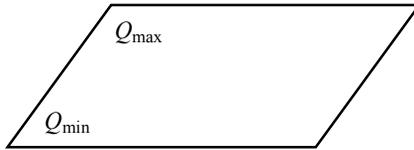


Рис. 15. Наибольший и наименьший углы ячейки

Сетка считается «хорошей», если величина, вычисленная по формуле, приведенной выше, близка к нулю. Чем ближе значение к единице, тем сетка «хуже». Для шестигранников, квадратов и треугольников значение скошенности не должно достигать 0.85, а для тетраэдров – 0.9.

Построение «плохой» сетки приводит к неточным решениям уравнений и медленной сходимости.

### Заключение

Рассмотрены методы построения структурированных сеток. Приведены описания каждой из групп этих методов, а также продемонстрированы примеры построения структурированных сеток с применениями некоторых из них.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лисейкин В.Д. Обзор методов построения структурных адаптивных сеток // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т. 36. С. 40.
2. Лисейкин В.Л. Разностные сетки. Теория и приложения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014. 253 с.
3. *Mark de Berg et al.* Computation Geometry. Algorithms and Applications. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 386 p.
4. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: в 2 т.: пер. с англ. В.Ф. Каменецкого. М.: Мир, 1991. Т. 2: Методы расчета различных течений. 552 с.
5. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов: пер. с англ. Г.В. Демидова, А.Л. Урванцева / под ред. Г.И. Марчук. М.: Мир, 1981. 304 с.
6. *Roberts G.O.* // Lecture Notes in Physics. 1971. V. 8. P. 171–176.
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
8. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2 т. М.: Мир, 1990. Т. 2. 392 с.
9. *Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W.* Numerical grid generation, foundations and applications. Amsterdam: North-Holland, 1985. 331 p.
10. Годунов С.К. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.

---

**Синишина** Екатерина Андреевна, студентка ММФ ТГУ; [sinishina\\_ekaterina@mail.ru](mailto:sinishina_ekaterina@mail.ru)  
**Гольдин** Виктор Данилович, старший преподаватель кафедры ВМиКМ ММФ ТГУ

# Периодические функции нескольких действительных переменных: теория и приложения\*

Г.К. Соколова

*Иркутский государственный университет, г. Иркутск, Россия*

Исследуется проблема существования периодических решений дифференциальных уравнений в частных производных. Без ограничения общности, рассматриваются периодические функции с прямоугольной решёткой периодов. Ранее автором изучены периодические функции нескольких действительных переменных и получены результаты, в которых описывается множество периодов таких функций, установлен критерий периодичности суммы и произведения периодических функций многих переменных и получены оценки для множеств периодов суммы и произведения этих функций. В статье показано применение полученных результатов к исследованию вопроса существования периодических решений уравнения Пфаффа.

**Ключевые слова:** *вполне интегрируемое уравнение Пфаффа, периодическая функция нескольких переменных, основной период в данном направлении,  $t$ -мерная решётка периодов.*

Изучается проблема существования периодических решений уравнения Пфаффа и построение множества периодов полученного решения. Приведены элементы теории периодических функций нескольких переменных, с помощью которых и устанавливается критерий существования периодического решений вполне интегрируемого уравнения Пфаффа.

Рассмотрим уравнение

$$f_1(\mathbf{r})dx_1 + f_2(\mathbf{r})dx_2 + f_3(\mathbf{r})dx_3 = 0. \quad (1)$$

Здесь функции  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $i = 1, 2, 3$ , являются непрерывными и имеют по совокупности переменных  $x_1, x_2, x_3$  непрерывные частные производные. Предположим, что уравнение (1) удовлетворяет условиям *полной интегрируемости*

$$\partial_{x_j} f_i = \partial_{x_i} f_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и правительства Иркутской области, проект № 20-41-385002 р\_Наставник.

Как известно (см., например, книгу Л.Э. Эльсгольца [1, с. 256]), тогда оно является уравнением в полных дифференциалах, причём его общий интеграл имеет вид

$$u(\mathbf{r}) = \int_0^{x_1} f_1(t, x_2, x_3) dt + \int_0^{x_2} f_2(0, t, x_3) dt + \int_0^{x_3} f_3(0, 0, t) dt. \quad (3)$$

Отметим, что вопрос существования периодических решений уравнения в полных дифференциалах исследовался ранее И. Тажимуратовым [2], который доказал критерий периодичности общего интеграла (3) уравнения Пфаффа с периодом  $\mathbf{T} = T_1\mathbf{e}_1 + T_2\mathbf{e}_2 + T_3\mathbf{e}_3$ . В представляемой работе получены необходимые и достаточные условия периодичности общего интеграла (3) уравнения (1) по переменным  $x_1, x_2, x_3$ , с указанием множества его периодов. Изложению основных результатов предпослём некоторые вспомогательные сведения. Введём сначала понятие периодической функции нескольких действительных переменных и соответствующее ему определение.

**Определение.** Функцию  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  будем называть периодической с периодом  $\mathbf{T}$ , если найдётся вектор  $\mathbf{T} \neq \mathbf{0}$ , такой, что выполняется равенство  $f(\mathbf{r} + \mathbf{T}) = f(\mathbf{r})$  при всяком  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ . Период наименьшего модуля  $\mathbf{T}_0$ , сонаправленный с  $\mathbf{T}$ , назовём основным периодом функции в данном направлении  $\mathbf{t}$ , где  $\mathbf{T} = |\mathbf{T}| \mathbf{t}$ .

Описание множества всех периодов периодической функции – одна из основных проблем теории периодических функций. В работе [3] показано, что множество периодов  $P_f$  каждой периодической функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  состоит из векторов

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \mathbf{T}_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \alpha_k \mathbf{t}_k,$$

здесь  $\mathbf{T}_k$  – базисные векторы  $m_1$ -мерной решётки  $\Lambda(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_{m_1})$  периодов,  $\mathbf{t}_k$  – направления постоянства функции  $f$ , и  $m_1 + m_2 \leq n$ . Всякий период  $\mathbf{T}$  периодической функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  однозначно представим в указанном виде при любых базисах  $m_1$ -мерной решётки и

$m_2$ -мерного подпространства  $\mathbb{R}^n$ . Другими словами, справедливо следующее представление

$$P_f = \Lambda(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_{m_1}) \oplus \text{span}(\mathbf{t}_{m_1+1}, \mathbf{t}_{m_1+2}, \dots, \mathbf{t}_{m_1+m_2}).$$

Кроме того, за счёт выбора неособенного линейного преобразования аргумента  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$  всякую периодическую функцию  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  можно сделать периодической по  $m_1$  выбранным переменным. Таким образом, без ограничения общности, периодическую функцию  $n$  переменных можно считать периодической по первым  $m_1$  переменным.

Далее приведём вспомогательные результаты интегрального и дифференциального исчисления периодических функций нескольких переменных. Справедлива следующая теорема, доказательство которой приведено в работе [4].

**Теорема 1.** Пусть функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывная и периодическая с основным периодом  $T_i$  по переменной  $x_i$ , тогда

$$\int_0^{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt = S_{T_i}[f]x_i + \varepsilon_i(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где выражение

$$S_{T_i}[f] = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt$$

обозначает среднее значение функции  $f$  по переменной  $x_i$  на отрезке  $[0, T_i]$ , а функция  $\varepsilon_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является периодической с основным периодом  $T_i$  по этой переменной.

Если функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна по переменной  $x_i$ , то  $\varepsilon_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  имеет непрерывную частную производную  $\partial_{x_i} \varepsilon$  по этой переменной и является решением начальной задачи

$$\partial_{x_i} \varepsilon_i = f(\mathbf{r}) - S_{T_i}[f], \quad \varepsilon(\mathbf{r})|_{x_i=0} = 0,$$

однозначная разрешимость которой гарантирует представлению (4) единственность. Также заметим, что в случае постоянства  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

по рассматриваемой переменной  $x_i$ , получаем уравнение  $\partial_{x_i} \varepsilon_i = 0$  с условием  $\varepsilon(\mathbf{r})|_{x_i=0} = 0$ , которое имеет решение  $\varepsilon(\mathbf{r}) = 0$ .

**Пример 1.** Рассмотрим непрерывную и  $2\pi$ -периодическую по переменной  $y$  функцию  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  вида

$$(x, y, z) \rightarrow \cos x + \sin y \cos z.$$

Справедливо следующее представление:

$$\int_0^y f(x, t, z) dt = y \cos x + \cos y \cos z.$$

В обозначениях теоремы 1 получаем

$$S_{T_y}[f] = \cos x, \quad \varepsilon(\mathbf{r}) = \cos y \cos z.$$

Отметим, что функция  $\varepsilon$  наследует  $2\pi$ -периодичность функции  $f$  по переменной  $y$ .

Прямым следствием теоремы 1 является следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть непрерывная функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  имеет по переменной  $x_i$  непрерывную частную производную и является  $T_i$ -периодической по этой переменной, тогда функция  $\partial_{x_i} f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  также будет  $T_i$ -периодической по переменной  $x_i$ .

Для дальнейшего изложения введём обозначение

$$F(\mathbf{r}) = \int_0^{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt.$$

Также из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

**Следствие.** Пусть функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывная и периодическая с основным периодом  $T_i$  по переменной  $x_i$ . Тогда для того чтобы интеграл  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  являлся периодической функцией по данной переменной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\int_0^{T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt = 0.$$

**Доказательство. Необходимость.** Пусть непрерывная по переменной  $x_i$  функция  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является периодической по этой переменной с периодом  $T_i$ . Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r} + T_i \mathbf{e}_i) - F(\mathbf{r}) &= \\ \int_0^{x_i + T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt - \int_0^{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt &= \\ = \int_{x_i}^{x_i + T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt = \int_0^{T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt &= 0. \end{aligned}$$

Здесь выполняется равенство

$$\int_{x_i}^{x_i + T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt = \int_0^{T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt,$$

левая часть которого не зависит от  $x_i$ , что является следствием из условия периодичности функции  $f$  по переменной  $x_i$  и

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} \int_{x_i}^{x_i + T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt &= \\ = f(x_1, \dots, x_i + T_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство *достаточности* очевидно и следует из теоремы 1. ■

**Замечание 1.** Пусть функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является периодической с множеством периодов  $P_f$ , порождённым  $\mathbf{T}_j = T_j \mathbf{e}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , и удовлетворяет по переменной  $x_i$  условиям следствия. Тогда интеграл  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  будет периодической функцией с множеством периодов, совпадающим с решёткой периодов  $P_f$  подынтегральной функции  $f$ .

Положим функцию  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  периодической с множеством периодов  $P_F$ , порождённым векторами  $\mathbf{T}_j = T_j \mathbf{e}_j$ , где  $j = 1, 2, \dots, n$ . Поскольку  $\mathbf{T}_j$  – основной период  $F$  по переменной  $x_j$ , то при любых

$i, j = 1, 2, \dots, n$  справедливо равенство

$$F(\mathbf{r} + T_j \mathbf{e}_j) - F(\mathbf{r}) = \int_0^{x_j} f(x_1, \dots, x_j + T_j, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt - \\ - \int_0^{x_j} f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt = 0,$$

продифференцировав которое по переменной  $x_i$ , получим соотношение

$$f(x_1, \dots, x_j + T_j, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0,$$

откуда следует, что  $T_j$  – период и функции  $f$  по переменной  $x_j$ , при всех  $j = 1, 2, \dots, n$ . Таким образом, периоды функции  $F$  являются периодами и исходной функции  $f$ , т. е.  $P_f \supseteq P_F$ .

С другой стороны, применив представление (4) для функции  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , получим равенство

$$\int_0^{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt = \varepsilon_i(\mathbf{r}),$$

где, по теореме 1,  $\varepsilon_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – периодическая функция с множеством периодов  $P_{\varepsilon_i} \supseteq P_f$ . Таким образом, из полученных оценок заключаем, что функция  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  периодическая и имеет множество периодов, совпадающее с решёткой периодов  $P_f$  подынтегральной функции  $f$ .

Приведённые выше результаты применимы для исследования проблемы существования периодических решений уравнения Пфаффа. Предположим, что общим интегралом (3) уравнения Пфаффа является периодическая функция  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , имеющая множеством периодов решётку  $P_u$ , порождённую векторами  $\mathbf{T}_i = T_i \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Поскольку  $T_i$  – основной период  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  в направлении  $\mathbf{e}_i$ , то из равенства  $f_i = \partial_{x_i} u$  и теоремы 2 следует, что  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – периодическая по переменной  $x_i$  с основным периодом  $T_i$  функция. Также имеет место цепочка равенств.

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{r} + T_1 \mathbf{e}_1) - u(\mathbf{r}) &= \int_0^{x_1+T_1} f_1(t, x_2, x_3) dt - \int_0^{x_1} f_1(t, x_2, x_3) dt = \\
&= \int_{x_1}^{x_1+T_1} f_1(t, x_2, x_3) dt = 0,
\end{aligned}$$

продифференцировав последнее из которых по  $x_i$ ,  $i = 2, 3$ , получим

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_1+T_1} \partial_{x_i} f_1(t, x_2, x_3) dt &= \int_{x_1}^{x_1+T_1} \partial_{x_i} f_i(t, x_2, x_3) dt = \\
&= f_i(x_1 + T_1, x_2, x_3) - f_i(x_1, x_2, x_3) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь используется предположение о том, что функции  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяют условию (2). Таким образом,  $T_1$  является периодом функций  $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f_3 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Так как  $T_2$  – основной период  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  в направлении  $\mathbf{e}_2$ , тогда выполняется цепочка равенств

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{r} + T_2 \mathbf{e}_2) - u(\mathbf{r}) &= \\
\int_0^{x_1} f_1(t, x_2 + T_2, x_3) dt - \int_0^{x_1} f_1(t, x_2, x_3) dt + \int_{x_2}^{x_2+T_2} f_2(0, t, x_3) dt &= 0.
\end{aligned}$$

Продифференцировав по  $x_1$  последнее равенство, получим

$$f_1(x_1, x_2 + T_2, x_3) - f_1(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

т. е.  $T_2$  – период функции  $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  по  $x_2$ . Продифференцируем это же равенство по переменной  $x_3$ .

$$\begin{aligned}
\int_0^{x_1} \partial_{x_3} f_1(t, x_2 + T_2, x_3) dt - \int_0^{x_1} \partial_{x_3} f_1(t, x_2, x_3) dt + \int_{x_2}^{x_2+T_2} \partial_{x_3} f_2(0, t, x_3) dt &= \\
= \int_0^{x_1} \partial_{x_1} f_3(t, x_2 + T_2, x_3) dt - \int_0^{x_1} \partial_{x_1} f_3(t, x_2, x_3) dt + \int_{x_2}^{x_2+T_2} \partial_{x_2} f_3(0, t, x_3) dt &= \\
= f_3(x_1, x_2 + T_2, x_3) - f_3(x_1, x_2, x_3) &= 0.
\end{aligned}$$

Здесь используется предположение, что функции  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяют условию (2). Таким образом,  $T_2$  является периодом функций  $f_1$  и  $f_3 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Аналогично, из периодичности общего интеграла по переменной  $x_3$ , с учетом условия (2), следует, что период  $T_3$  является периодом функций  $f_1$  и  $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Таким образом, из приведённых выше рассуждений следует, что векторы, порождающие решётку периодов функции  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  являются периодами и функций  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , причём  $P_{f_1} \cap P_{f_2} \cap P_{f_3} \neq \emptyset$ .

**Теорема 4.** Пусть непрерывные функции  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  имеют такие непрерывные частные производные  $\partial_{x_j} f_i$ , что выполнено условие (2), и периодические с решётками периодов  $P_{f_i}$ , порожденными векторами  $\mathbf{T}_{ij} = T_{ij} \mathbf{e}_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Тогда для того чтобы общий интеграл (3) уравнения Пфаффа был периодическим по переменным  $x_1, x_2, x_3$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось  $P_{f_1} \cap P_{f_2} \cap P_{f_3} \neq \emptyset$  и

$$\int_0^{T_1} f_1(t, x_2, x_3) dt = \int_0^{T_2} f_2(0, t, x_3) dt = \int_0^{T_3} f_3(0, 0, t) dt = 0.$$

Множеством периодов решения является  $P_u = P_{f_1} \cap P_{f_2} \cap P_{f_3}$ .

**Доказательство. Необходимость.** Пусть общий интеграл (3) уравнения Пфаффа является периодической функцией  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  с множеством периодов, порождённым векторами  $\mathbf{T}_i = T_i \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Поскольку  $T_1$  – основной период  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  в направлении орта  $\mathbf{e}_1$ , то справедлива цепочка равенств.

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r} + T_1 \mathbf{e}_1) - u(\mathbf{r}) &= \int_0^{x_1 + T_1} f_1(t, x_2, x_3) dt - \int_0^{x_1} f_1(t, x_2, x_3) dt = \\ &= \int_{x_1}^{x_1 + T_1} f_1(t, x_2, x_3) dt = \int_0^{T_1} f_1(t, x_2, x_3) dt = 0. \end{aligned}$$

Здесь выполняется равенство

$$\int_{x_1}^{x_1+T_1} f_1(t, x_2, x_3) dt = \int_0^{T_1} f_1(t, x_2, x_3) dt,$$

левая часть которого не зависит от  $x_1$ , что следует из периодичности функции  $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  по переменной  $x_1$  и

$$\partial_{x_1} \int_{x_1}^{x_1+T_1} f_1(t, x_2, x_3) dt = f_1(x_1 + T_1, x_2, x_3) - f_1(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

Проведя аналогичные рассуждения по переменным  $x_2$  и  $x_3$ , получим

$$\int_0^{T_2} f_2(0, t, x_3) dt = \int_0^{T_3} f_3(0, 0, t) dt = 0.$$

*Достаточность.* Пусть функции  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяют условию (2) и являются периодическими с решётками периодов  $P_{f_i}$ , порождёнными векторами  $T_{ij} = T_{ij} \mathbf{e}_j$ , где  $i, j = 1, 2, 3$ , и имеющими не пустое пересечение; пусть также выполняется

$$\int_0^{T_1} f_1(t, x_2, x_3) dt = \int_0^{T_2} f_2(0, t, x_3) dt = \int_0^{T_3} f_3(0, 0, t) dt = 0.$$

Тогда применив представление (4) и утверждение замечания 1, получим, что общий интеграл (3) уравнения Пфаффа (1) будет являться функцией  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  вида

$$\mathbf{r} \rightarrow \varepsilon_1(\mathbf{r}) + \varepsilon_2(\mathbf{r}) + \varepsilon_3(\mathbf{r}),$$

где  $\varepsilon_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  – периодические функции с множествами периодов  $P_{\varepsilon_i} = P_{f_i}$ . Следовательно, в силу того, что  $P_{f_1} \cap P_{f_2} \cap P_{f_3} \neq \emptyset$ , общий интеграл (3) является периодической функцией с множеством периодов  $P_u \supseteq P_{f_1} \cap P_{f_2} \cap P_{f_3}$ , что нетрудно получить, воспользовавшись оценкой для множеств периодов суммы периодических функций, приведённой в работе [5]. Таким образом, из полученных оценок для множества периодов функции  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  заключаем, что верно равенство  $P_u = P_{f_1} \cap P_{f_2} \cap P_{f_3}$ . ■

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
2. *Тажимуратов И.* О периодических решениях одной системы дифференциальных уравнений и частных производных первого порядка // Математические заметки. 1981. Т. 30. № 3. С. 363–369.
3. *Соколова Г.К.* О периодических функциях нескольких действительных переменных // ИТНОУ: Информационные технологии в науке, образование и управление. 2018. № 5(9). С. 60–65.
4. *Соколова Г.К.* Периодические функции нескольких переменных: элементы теории и приложения // Сборник научных трудов XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук»: в 7 т. Т. 3. Математика. Томск: Изд-во ТПУ, 2019. С. 28–30.
5. *Соколова Г.К.* Периодичность суммы и произведения периодических функций нескольких переменных // Сборник материалов Международной конференции «XXIX Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ–2018). Секции 1–3. Симферополь: Полипринт, 2018. С. 28–31.

---

**Соколова** Галина Константиновна, студентка ИГУ; 98gal@mail.ru

# Перестановочные многочлены третьей и четвёртой степени

М.К. Чернова, Е.А. Тимошенко

*Национальный исследовательский  
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Рассмотрены  $p$ -перестановочные и вполне  $p$ -перестановочные многочлены третьей и четвёртой степеней. Были доказаны теоремы, позволяющие узнать, для каких значений  $p$  будут существовать многочлены степеней 3 и 4 с указанными свойствами, а также найти количество таких многочленов.

**Ключевые слова:**  $p$ -перестановочный многочлен, конечное простое поле.

Всякий многочлен с целыми коэффициентами индуцирует отображение на произвольном кольце с единицей. Если в качестве такого кольца рассматривается факторкольцо кольца целых чисел, мы приходим к понятию перестановочного многочлена. Эти многочлены играют важную роль при изучении конечных проективных геометрий и применяются для построения криптографических систем.

**Определение 1.** Пусть  $p$  – простое число и  $q(x)$  – многочлен с целыми коэффициентами. Этот многочлен называется:

-  $p$ -перестановочным, если функция  $q_1 : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , индуцированная многочленом  $q(x)$ , является биекцией;

- вполне  $p$ -перестановочным, если для всех натуральных чисел  $m$  функция  $q_m : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ , индуцированная многочленом  $q(x)$ , является биекцией.

Следующее предложение проверяется непосредственно.

**Предложение 2.** а) Если  $f(x)$  и  $h(x)$  –  $p$ -перестановочные [вполне  $p$ -перестановочные] многочлены, то многочлен  $h(f(x))$  является  $p$ -перестановочным [вполне  $p$ -перестановочным].

б) Многочлен вида  $ax + b$ , где  $a, b \in \mathbb{Z}$ , является  $p$ -перестановочным [вполне  $p$ -перестановочным] тогда и только тогда, когда  $a$  не делится на  $p$ .

**Следствие 3.** Если  $f(x)$  – какой-либо  $p$ -перестановочный [вполне  $p$ -перестановочный] многочлен, то многочлены  $af(x)+b$  и  $f(ax+b)$ , где  $a, b \in \mathbb{Z}$ , также являются  $p$ -перестановочными [вполне  $p$ -перестановочными], если  $a$  не делится на  $p$ .

**Теорема 4 [1].** Многочлен  $q(x)$  вполне  $p$ -перестановочен тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

- многочлен  $q(x)$  является  $p$ -перестановочным;
- $q'(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$  при всех  $a \in \mathbb{Z}$ .

Оба указанных свойства зависят только от остатков от деления на  $p$  коэффициентов многочлена  $q(x)$ ; поэтому удобно с самого начала считать, что эти коэффициенты принадлежат полю  $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  (в дальнейшем мы так и делаем).

Далее в поле  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  через  $\bar{i}$  обозначаем элемент  $i + p\mathbb{Z}$ .

**Предложение 5 [1].** Для  $p > 2$  не существует  $p$ -перестановочных многочленов степени 2.

Легко видеть, что из многочленов степени 2 только  $x^2$  и  $x^2 + \bar{1}$  являются 2-перестановочными. Поскольку производная этих двух многочленов есть  $\bar{0}$ , то вполне 2-перестановочных многочленов степени 2 не существует.

В формулировке теоремы 6 и в последующем тексте статьи при использовании знака суммы подразумевается суммирование по всем значениям  $x \in \mathbb{Z}_p$ .

**Теорема 6 [2].** Пусть  $s$  – натуральное число. Сумма

$$\sum x^s = \bar{0}^s + \bar{1}^s + \dots + \overline{p-1}^s$$

равна  $-\bar{1}$ , если  $s$  делится на число  $p-1$ , и равна  $\bar{0}$ , если  $s$  не делится на  $p-1$ .

**Предложение 7.** Пусть  $q(x)$  –  $p$ -перестановочный многочлен и  $s$  – натуральное число. Тогда сумма

$$\sum (q(x))^s = (q(\bar{0}))^s + (q(\bar{1}))^s + \dots + (q(\overline{p-1}))^s$$

равна  $-\bar{1}$ , если  $s$  делится на число  $p-1$ , и равна  $\bar{0}$ , если  $s$  не делится на  $p-1$ .

**Доказательство.** Многочлен  $q(x)$  –  $p$ -перестановочный, т.е. значения  $q(\bar{0}), q(\bar{1}), \dots, q(\overline{p-1})$  пробегает всё поле  $\mathbb{Z}_p$ . Применяя теорему 6, получаем требуемое утверждение. ■

**Теорема 8.** Пусть  $p-1$  делится на  $s$ , где  $s > 1$ . Тогда не существует  $p$ -перестановочных многочленов степени  $s$ .

**Доказательство.** Пусть многочлен

$$f(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

является  $p$ -перестановочным. Тогда многочлен  $f(x) - a_0$  – тоже  $p$ -перестановочный. Представим  $p$  в виде  $ks + 1$ , где  $k$  – натуральное число. Рассмотрим равенство

$$\sum (f(x) - a_0)^k = \sum a_s^k x^{ks} + \sum k a_s^{k-1} a_{s-1} x^{ks-1} + \dots + \sum a_1^k x^k.$$

Левая часть по предложению 7 равна  $\bar{0}$ , так как  $k < ks$  и, значит,  $k$  не может делиться на число  $p-1 = ks$ . В правой части первое слагаемое по теореме 6 будет равно  $-a_s^k$ , а остальные равны нулю, поскольку показатели степени  $x$  в них меньше числа  $p-1 = ks$ . Получаем, что  $-a_s^k = \bar{0}$ . Тогда  $a_s = \bar{0}$ ; значит, степень многочлена  $f(x)$  меньше  $s$ . ■

**Следствие 9.** Если простое число  $p$  имеет вид  $3k + 1$ , то не существует  $p$ -перестановочных многочленов степени 3.

**Замечание.** Из теоремы 8 как простое следствие можно получить также предложение 5.

Пусть  $g(y) = b_s y^s + b_{s-1} y^{s-1} + b_{s-2} y^{s-2} + \dots + b_1 y + b_0$  – это  $p$ -перестановочный [вполне  $p$ -перестановочный] многочлен степени  $s$ , где  $s$  не делится на число  $p$ . От этого многочлена  $g(y)$  можно перейти к многочлену более простого вида  $f(x) = x^s + a_{s-2} x^{s-2} + \dots + a_1 x$  (по которому можно в некотором смысле восстановить исходный) путём замены

$$y = x - \frac{b_{s-1}}{s b_s} :$$

$$g(y) = b_s \left( y^s + \frac{b_{s-1}}{b_s} y^{s-1} + \frac{b_{s-2}}{b_s} y^{s-2} + \dots + \frac{b_1}{b_s} y + \frac{b_0}{b_s} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= b_s \left[ \left( x - \frac{b_{s-1}}{sb_s} \right)^s + \frac{b_{s-1}}{b_s} \left( x - \frac{b_{s-1}}{sb_s} \right)^{s-1} + \right. \\
&+ \left. \frac{b_{s-2}}{b_s} \left( x - \frac{b_{s-1}}{sb_s} \right)^{s-2} + \dots + \frac{b_1}{b_s} \left( x - \frac{b_{s-1}}{sb_s} \right) + \frac{b_0}{b_s} \right] = \\
&= b_s (x^s + a_{s-2}x^{s-2} + \dots + a_1x + a_0).
\end{aligned}$$

Так как многочлен  $b_s(x^s + a_{s-2}x^{s-2} + \dots + a_1x + a_0)$  является  $p$ -перестановочным [вполне  $p$ -перестановочным], то многочлен  $f(x) = x^s + a_{s-2}x^{s-2} + \dots + a_1x$  также будет  $p$ -перестановочным [вполне  $p$ -перестановочным].

Итак, если существует  $p$ -перестановочный [вполне  $p$ -перестановочный] многочлен степени  $s$ , не делящийся на число  $p$ , то существует и  $p$ -перестановочный [вполне  $p$ -перестановочный] многочлен вида  $x^s + a_{s-2}x^{s-2} + \dots + a_1x$ .

И обратно, если многочлен  $f(x) = x^s + a_{s-2}x^{s-2} + \dots + a_1x$  окажется  $p$ -перестановочным [вполне  $p$ -перестановочным], то ему будет соответствовать семейство, состоящее из  $p^2(p-1)$  различных  $p$ -перестановочных [вполне  $p$ -перестановочных] многочленов вида

$$g(y) = c_0[(y + c_1)^s + a_{s-2}(y + c_1)^{s-2} + \dots + a_1(y + c_1) + c_2],$$

где  $c_0 \in \mathbb{Z}_p \setminus \{\bar{0}\}$  и  $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_p$ .

**Теорема 10.** Пусть простое число  $p$  имеет вид  $3k-1$ . Тогда многочлен вида  $x^3 + ax$  является  $p$ -перестановочным в том и только в том случае, когда  $a = \bar{0}$ .

*Доказательство.* Пусть  $f(x) = x^3 + ax$  есть  $p$ -перестановочный многочлен. Если  $k=1$ , то  $p=2$  и  $a$  может принимать значения  $\bar{0}$  и  $\bar{1}$ . При  $a = \bar{1}$  получаем многочлен  $x^3 + x$ , который не является  $p$ -перестановочным, так как  $f(\bar{0}) = \bar{0}$  и  $f(\bar{1}) = \bar{0}$ . Значит,  $a = \bar{0}$  и  $f(x) = x^3$ .

Если  $k > 1$ , то рассмотрим равенство

$$\sum (f(x))^k = \sum x^{3k} + aC_k^1 \cdot \sum x^{3k-2} + \dots + a^k \cdot \sum x^k.$$

Левая часть по предложению 7 равна  $\bar{0}$ , так как  $k < 3k - 2$  и, значит,  $k$  не может делиться на число  $p - 1 = 3k - 2$ . В правой части второе слагаемое по теореме 6 будет равно  $-a \cdot C_k^1$ , а остальные равны нулю, поскольку, начиная с третьего слагаемого, показатели степени  $x$  в них меньше числа  $p - 1 = 3k - 2$  и  $3k$  не делится на число  $p - 1 = 3k - 2$ . Получаем, что  $-a \cdot C_k^1 = \bar{0}$ , где  $C_k^1 = k$ . Отсюда  $a = \bar{0}$ , а значит,  $f(x) = x^3$ .

Теперь докажем, что  $x^3$  —  $p$ -перестановочный многочлен. Для  $p = 3k - 1$  и  $s = 3$  имеем  $\text{НОД}(s, p - 1) = 1$ . Это значит, что количество кубических вычетов равно  $p - 1$  [3, с. 65]. Поэтому  $x^3$  принимает  $p - 1$  различных значений, когда значения  $x$  пробегают  $(p - 1)$ -элементное множество  $\mathbb{Z}_p \setminus \{\bar{0}\}$ . Так как  $\bar{0}^3 = \bar{0}$ , получаем, что многочлен  $x^3$  —  $p$ -перестановочный. ■

**Следствие 11.** Если простое число  $p$  имеет вид  $3k - 1$ , то многочлен степени 3 будет  $p$ -перестановочным тогда и только тогда, когда он имеет вид  $c_0[(x + c_1)^3 + c_2]$ , где  $c_0 \in \mathbb{Z}_p \setminus \{\bar{0}\}$  и  $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_p$ .

Таким образом, в случае  $p = 3k - 1$  существует  $p^2(p - 1)$  различных  $p$ -перестановочных многочленов степени 3.

**Следствие 12.** Не существует вполне  $p$ -перестановочных многочленов степени 3 для  $p \neq 3$ .

*Доказательство.* Пусть  $p = 3k + 1$ . Тогда (в силу следствия 9) не существует  $p$ -перестановочных многочленов степени 3; следовательно, не существует и вполне  $p$ -перестановочных многочленов степени 3.

Пусть  $p = 3k - 1$ . Если существует хотя бы один вполне  $p$ -перестановочный многочлен степени 3, то найдётся и вполне  $p$ -перестановочный многочлен вида  $x^3 + ax$ . По теореме 10 если многочлен  $f(x) = x^3 + ax$  —  $p$ -перестановочный, то  $a = \bar{0}$ ; но тогда этот многочлен не будет вполне  $p$ -перестановочным, так как  $f'(x) = \bar{3}x^2$  и  $f'(\bar{0}) = \bar{0}$ . ■

Будем теперь искать 3-перестановочные многочлены в виде  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  (каждому многочлену указанного вида будет соответствовать семейство многочленов  $c_0f(x) + c_1$ , где  $c_0 \in \mathbb{Z}_3 \setminus \{\bar{0}\}$  и  $c_1 \in \mathbb{Z}_3$ ).

Так как  $f(\bar{0}) = \bar{0}$ , то либо  $f(\bar{1}) = \bar{1}$  и  $f(\bar{2}) = \bar{2}$ , либо  $f(\bar{1}) = \bar{2}$  и  $f(\bar{2}) = \bar{1}$ . В обоих случаях  $f(\bar{2}) = 2f(\bar{1})$ , поэтому  $\bar{2} + a + 2b = \bar{2} + 2a + 2b$ . Отсюда  $a = \bar{0}$ , т.е.  $f(x) = x^3 + bx$ .

Многочлен  $x^3 + \bar{2}x$  не будет 3-перестановочным, так как переводит  $\bar{0}$  и  $\bar{1}$  в  $\bar{0}$ ; следовательно,  $b \neq \bar{2}$ . Непосредственно проверяется, что  $x^3$  и  $x^3 + x$  – 3-перестановочные многочлены.

Из этих двух многочленов  $x^3 + x$  является вполне 3-перестановочным (многочлен  $(x^3)' = \bar{3}x^2$  совпадает с  $\bar{0}$ , а многочлен  $(x^3 + x)' = \bar{3}x^2 + \bar{1}$  совпадает с  $\bar{1}$ ).

Таким образом, доказано

**Предложение 13.** а) Многочлен третьей степени является 3-перестановочным тогда и только тогда, когда он имеет вид  $c_0(x^3 + x) + c_1$  либо  $c_0x^3 + c_1$ , где  $c_0 \in \mathbb{Z}_3 \setminus \{\bar{0}\}$  и  $c_1 \in \mathbb{Z}_3$ .

б) Многочлен третьей степени является вполне 3-перестановочным тогда и только тогда, когда он имеет вид  $c_0(x^3 + x) + c_1$ , где  $c_0 \in \mathbb{Z}_3 \setminus \{\bar{0}\}$  и  $c_1 \in \mathbb{Z}_3$ .

Итак, общее количество 3-перестановочных многочленов и вполне 3-перестановочных многочленов степени 3 равно 12 и 6 соответственно.

Из теоремы 8 сразу следует

**Предложение 14.** Если простое число  $p$  имеет вид  $4k + 1$ , то не существует  $p$ -перестановочных многочленов степени 4.

**Теорема 15.** а) Если простое число  $p$  имеет вид  $4k - 1$  и  $k > 2$ , то не существует  $p$ -перестановочных многочленов степени 4.

б) Многочлен  $x^4 + ax^2 + bx$  является 7-перестановочным тогда и только тогда, когда  $a = \bar{0}$  и  $b = \pm\bar{3}$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$  есть  $p$ -перестановочный многочлен, где  $p = 4k - 1$  и  $k > 1$ .

Рассмотрим равенство

$$\sum (f(x))^k = \sum x^{4k} + aC_k^1 \cdot \sum x^{4k-2} + \dots + b^k \cdot \sum x^k.$$

Левая часть по предложению 7 равна  $\bar{0}$ , так как  $k < 4k - 2$  и, значит,  $k$  не может делиться на число  $p - 1 = 4k - 2$ . В правой части второе слагаемое по теореме 6 будет равно  $-a \cdot C_k^1$ , а остальные равны нулю, поскольку, начиная с третьего слагаемого, показатели степени  $x$  в них меньше числа  $p - 1 = 4k - 2$  и  $4k$  не делится на число  $p - 1 = 4k - 2$ . Получаем, что  $-a \cdot C_k^1 = \bar{0}$ . Так как  $C_k^1 = k < p - 1 < p$ , то  $k$  не может делиться на  $p$ . Отсюда  $a = \bar{0}$ , а значит,  $f(x) = x^4 + bx$ .

Теперь рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \sum (f(x))^{k+1} = \sum x^{4k+4} + bC_{k+1}^1 \cdot \sum x^{4k+1} + \\ + b^2C_{k+1}^2 \cdot \sum x^{4k-2} + \dots + b^{k+1} \cdot \sum x^{k+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Левая часть по предложению 7 равна  $\bar{0}$ , так как  $k + 1 < 4k - 2$  и, значит,  $k + 1$  не может делиться на число  $p - 1 = 4k - 2$ .

Рассмотрим правую часть равенства. Все слагаемые, начиная с четвертого, равны нулю, поскольку показатели степени  $x$  в них меньше числа  $p - 1 = 4k - 2$ . Третье слагаемое по теореме 6 будет равно  $-b^2 \cdot C_{k+1}^2$ . Второе слагаемое равно нулю, так как нечётное число  $4k + 1$  не может делиться на чётное число  $4k - 2$ .

Пусть  $k > 2$ . Поскольку  $4k - 2 < 4k + 4 < 2(4k - 2)$ , то  $4k + 4$  не делится на  $4k - 2$  и первое слагаемое в правой части равенства (1) также равно нулю по теореме 6. Отсюда получаем, что  $-b^2 \cdot C_{k+1}^2 = \bar{0}$ . Число  $C_{k+1}^2 = \frac{k(k+1)}{2}$  не делится на  $p$  (так как  $k < k + 1 < p$ ); значит,  $b = \bar{0}$  и  $f(x) = x^4$ . Но в этом случае многочлен  $f(x)$  не является  $p$ -перестановочным (поскольку  $f(\bar{1}) = f(-\bar{1}) = \bar{1}$ ).

Полученное противоречие показывает, что не существует  $p$ -перестановочных многочленов вида  $x^4 + ax^2 + bx$ . Отсюда следует справедливость утверждения а).

Пусть  $k = 2$ , т.е.  $p = 7$ . Тогда равенство (1) примет вид

$$\sum (f(x))^3 = \sum x^{12} + 3b \cdot \sum x^9 + 3b^2 \cdot \sum x^6 + b^3 \cdot \sum x^3.$$

По теореме 6 и предложению 7 получаем, что  $\bar{0} = -\bar{1} - 3b^2$ , отсюда  $b = \pm\bar{3}$ . Непосредственно проверяется, что многочлены  $x^4 + \bar{3}x$  и  $x^4 - \bar{3}x$  являются 7-перестановочными:

$x$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$x^4 + \bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$x^4 - \bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$

Тем самым доказано утверждение б). ■

**Следствие 16.** *Многочлен степени 4 будет 7-перестановочным тогда и только тогда, когда он имеет вид*

$$c_0[(x + c_1)^4 \pm 3(x + c_1) + c_2],$$

где  $c_0 \in \mathbb{Z}_7 \setminus \{\bar{0}\}$  и  $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_7$ .

Таким образом, общее количество 7-перестановочных многочленов степени 4 равно  $2 \cdot 6 \cdot 7^2$ , т.е. 588.

**Предложение 17.** *Многочлен вида  $x^4 + ax^2 + bx$  является 3-перестановочным тогда и только тогда, когда  $a = \bar{2}$  и  $b = \pm\bar{1}$ .*

**Доказательство.** Допустим, что многочлен  $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$  является 3-перестановочным. Рассмотрим равенство

$$\sum f(x) = \sum x^4 + a \cdot \sum x^2 + b \cdot \sum x.$$

Левая часть по предложению 7 равна  $\bar{0}$ , а правая часть по теореме 6 равна  $-\bar{1} - a$ . Тогда  $a = \bar{2}$ , т.е.  $f(x) = x^4 + \bar{2}x^2 + bx$ .

Теперь рассмотрим все возможные значения для  $b$ :

$x$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$x^4 + \bar{2}x^2$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$x^4 + \bar{2}x^2 + x$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Отсюда получаем, что  $b = \pm\bar{1}$ . ■

**Следствие 18.** *Многочлен степени 4 будет 3-перестановочным тогда и только тогда, когда он имеет вид*

$$c_0[(x+c_1)^4 + 2(x+c_1)^2 \pm (x+c_1) + c_2],$$

где  $c_0 \in \mathbb{Z}_3 \setminus \{\bar{0}\}$  и  $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_3$ .

Таким образом, общее количество 3-перестановочных многочленов степени 4 равно  $2^2 \cdot 3^2$ , т.е. 36.

**Предложение 19.** *Не существует вполне  $p$ -перестановочных многочленов степени 4 для  $p \neq 2$ .*

**Доказательство.** Пусть выполнено либо  $p = 4k - 1$  и  $k > 2$ , либо  $p = 4k + 1$ . Тогда по предложению 14 и теореме 15 не существует  $p$ -перестановочных многочленов степени 4, поэтому не существует также и вполне  $p$ -перестановочных многочленов степени 4.

Остаётся проверить, что перестановочные многочлены, найденные в теореме 15 и предложении 17, не являются вполне 7-перестановочными и вполне 3-перестановочными:

- $f(x) = x^4 \pm \bar{3}x$  не является вполне 7-перестановочным многочленом: так как  $f'(x) = \bar{4}x^3 \pm \bar{3}$ , то  $f'(\pm \bar{1}) = \bar{0}$ ;

- $f(x) = x^4 + \bar{2}x^2 \pm x$  не будет вполне 3-перестановочным многочленом: так как  $f'(x) = x^3 + x \pm \bar{1}$ , то  $f'(\pm \bar{1}) = \bar{0}$ . ■

**Предложение 20.** *Многочлен четвёртой степени является 2-перестановочным тогда и только тогда, когда он имеет вид*

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + (a+b)x + c,$$

где  $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + dx$ , тогда  $f(\bar{0}) = \bar{0}$ . Этот многочлен является 2-перестановочным тогда и только тогда, когда  $f(\bar{1}) = \bar{1}$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы  $a + b + d = \bar{0}$ . Последнее, в свою очередь, даёт нам  $d = -a - b = a + b$ , т.е.  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + (a+b)x$ . Предложение доказано. ■

Таким образом, общее количество 2-перестановочных многочленов степени 4 равно 8.

**Следствие 21.** Среди многочленов четвёртой степени только  $x^4 + x^2 + x + \bar{1}$  и  $x^4 + x^2 + x$  будут вполне 2-перестановочными.

**Доказательство.** Рассмотрим 2-перестановочный многочлен

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + (a+b)x + c.$$

Для него  $f'(x) = ax^2 + a + b$ ,  $f'(\bar{0}) = a + b$  и  $f'(\bar{1}) = b$ .

Таким образом, свойство вполне 2-перестановочности многочлена  $f(x)$  эквивалентно условиям  $a + b \neq \bar{0}$  и  $b \neq \bar{0}$ , а это, в свою очередь, равносильно равенствам  $b = \bar{1}$  и  $a = \bar{0}$ . ■

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shujun Li*. Permutation polynomials modulo  $m$ . URL: <https://arxiv.org/pdf/math/0509523v6.pdf>.
2. *Боревич З.И., Шафаревич И.П.* Теория чисел. М.: Наука, 1985. 504 с.
3. *Дэвенпорт Г.* Высшая арифметика. Введение в теорию чисел. М.: Наука, 1965. 176 с.

---

**Чернова** Маргарита Константиновна, бакалавр ТГУ; margarita1998\_2010@mail.ru

**Тимошенко** Егор Александрович, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры алгебры ММФ ТГУ; tea471@mail.tsu.ru

# Об оценивании параметров регрессионной модели с семимартингалным шумом

Е.А. Степанова, Т.В. Емельянова

*Национальный исследовательский  
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Для случайного процесса с семимартингалным шумом предлагается последовательная процедура оценивания неизвестных параметров, использующая специальное правило останковки. Формулируется и доказывается теорема об оценке среднего времени длительности процедуры. Кроме того, с помощью численного моделирования проведено сравнение результатов оценивания параметров при использовании метода наименьших квадратов и последовательной процедуры, а также вычисление момента останковки и оптимального времени наблюдения системы.

**Ключевые слова:** *последовательное оценивание, момент останковки, семимартингалный шум, регрессионная модель, случайный процесс.*

Одна из центральных задач статистического анализа реальной системы – вычисление на основании имеющихся статистических данных как можно более точных приближенных значений – статистических оценок для одного или нескольких числовых параметров, характеризующих функционирование этой системы. Кроме того, актуальная задача вероятностной диагностики – это выявление факта, не является ли среднее время процедуры оценивания параметров слишком большим или даже бесконечным.

В данной работе рассматривается задача оценивания параметра регрессионной модели

$$dy_t = \theta y_t dt + d\xi_t$$

с шумом семимартингалного типа, который имеет вид

$$\xi_t = \sigma_1 W_t + \sigma_2 \sum_{i=1}^{N_t} X_i,$$

где  $W = (W_t, F_t)$  – винеровский процесс,  $\theta$  – неизвестный параметр,  $-\infty < \theta < +\infty$ , подлежащий оцениванию по наблюдениям за процессом  $y = (y_t, F_t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $X_i$  – н.о.р.с.в.

Предлагается получить оценку среднего времени длительности процедуры по оцениванию неизвестного параметра данной модели.

Для оценивания параметров процесса регрессии будем использовать оценку, полученную по методу максимального правдоподобия [1]. Данная оценка имеет вид

$$\hat{\theta}_t = \frac{\int_0^t y_t dy_t}{\int_0^t y_t^2 dt}.$$

Вторая задача – задача определения последовательного оптимального плана  $\Delta_H = \Delta(\tau_H, \delta_H)$ , где  $\tau_H$  – правило остановки ( $\tau_H > 0$ ),  $\delta_H$  – решающая функция,  $H$  – порог процедуры.

Пусть  $H > 0$ , введем момент остановки по правилу

$$\tau_H = \inf \left( t : \int_0^t y_s^2 ds = H \right).$$

Таким образом, оценка параметра данной модели с непрерывным временем представляет собой оценку по методу максимального правдоподобия, вычисленную в момент остановки  $\tau_H$ :

$$\hat{\theta}_{\tau_H}(X) = \frac{\int_0^{\tau_H} y_t dX_t}{\int_0^{\tau_H} y_t^2 dt}.$$

Для регрессионной модели с непрерывным временем и шумом семимартингального вида было проведено численное моделирование в среде Matlab, с помощью которого наглядно показано, что последовательное оценивание можно применять для данной модели с шумом семимартингального вида, так же как и оценивание с помощью метода наименьших квадратов.

Для определенности значение параметра  $\theta$  приняли равным 0.3. Объем выборки  $N = 1000$  ( $N = 50$ ),  $y_0 = 0$ ,  $\Delta t = 0,01$  – шаг дискретизации.

На рис. 1 представлены иллюстрации процесса регрессии с шумом семимартингального вида с параметрами, определенными выше для  $N = 50$  и  $N = 1000$  соответственно.

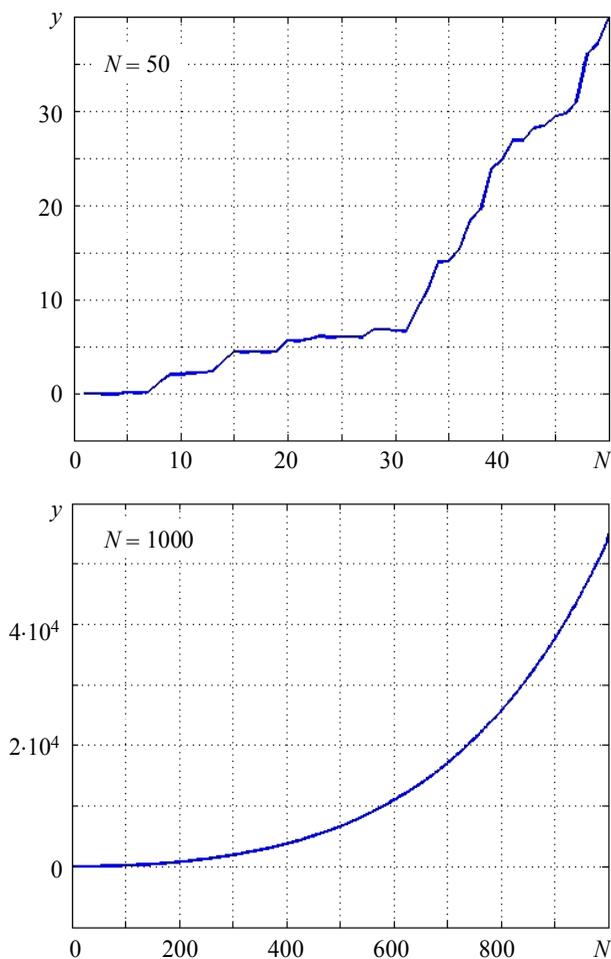


Рис. 1. Процесс регрессии с семимартингальным шумом

В таблице представлены результаты численного моделирования для параметра  $\theta = 0.3$ , при количестве наблюдений  $N = 1000$  и пороге процедуры  $H = 300$ : последовательная и МНК оценки, их усредненные

значения, максимальные и минимальные отклонения оценок от истинного значения параметра.

### Результаты численного моделирования

Оценки	Значения оценок	MIN	MAX	Среднее значение
$\theta_M$ (МНК)	0.30658 0.29567 0.29045	0.0000922	0.158363	0.309486
$\theta_{\tau_H}$ (Послед.)	0.31681 0.30935 0.29955	0.0000435	0.208592	0.315345

На рис. 2 представлена иллюстрация отклонения оценок от истинного значения параметра, вычисленных методом наименьших квадратов и последовательно (в случайный момент остановки  $\tau_H$ ).

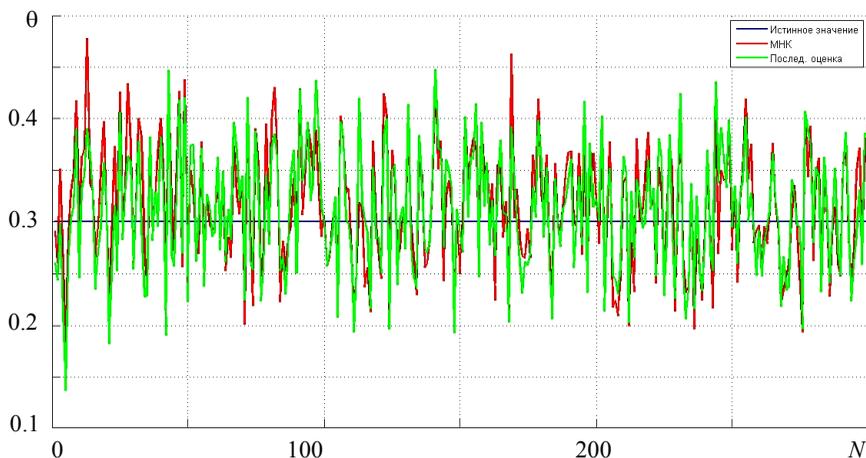


Рис. 2. Отклонение моделируемых оценок от истинного значения параметра

Следует также отметить, что последовательные оценки и оценки МНК сравнивались при одинаковых входных условиях, т.е. при одинаковой длительности процедуры (для последовательного оценивания усреднялся момент остановки и оценки МНК строились при выборке того же объема).

На рис. 3 представлена иллюстрация процесса регрессии с семимартингальным шумом с истинным значением параметра  $\theta = 0.3$  и полученными оценками при количестве наблюдений  $N = 1000$ .

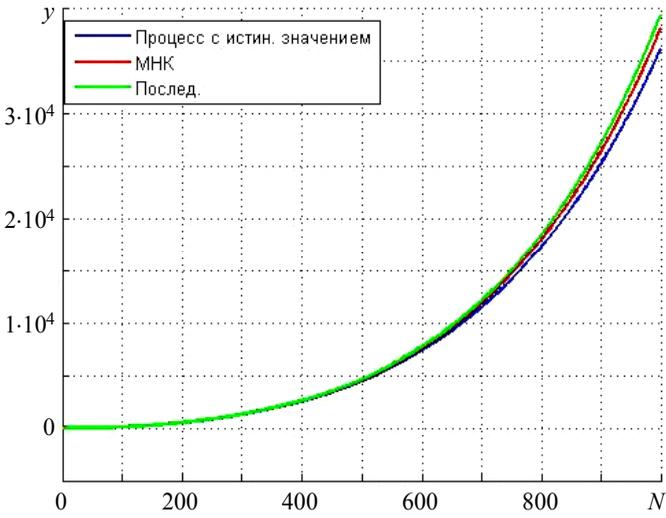


Рис. 3. Процесс регрессии с семимартингальным шумом при  $N = 1000$  с полученными оценками

В ходе исследования удалось получить следующие результаты: оценки МНК имеют меньшее отклонение от истинного значения параметра, чем последовательные оценки, но разница отклонений настолько мала, что можно говорить о точности обеих оценок.

Основным результатом проделанной работы является следующая теорема, которая дает оценку длительности последовательной процедуры.

**Теорема 1.** Пусть дан стохастический базис  $(\Omega, F, P, (F_t)_{t \in T})$ ,  $W = (W_t, F_t)$  – винеровский процесс,  $N = (N_t, F_t)$  – процесс Пуассона,  $X_i$  – н.о.р.с.в.,  $\theta$  – параметр. И пусть наблюдаемый процесс  $y = (y_t, F_t)$ ,  $t \geq 0$ , имеет стохастический дифференциал

$$dy_t = \theta y_t dt + d\xi_t,$$

где  $d\xi_t$  – семимартингальный шум, который имеет вид

$$\xi_t = \sigma_1 W_t + \sigma_2 \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

Тогда для последовательного плана  $\Delta_H = \Delta(\tau_H, \delta_H), H > 0$

$$E\tau_H(\xi) < \infty,$$

$$E\tau_H(\xi) \leq \sqrt{(2\theta H)^2 + 4H(4\sigma_1^2\sigma_2^2\lambda + 2\sigma_1^4 + 2\sigma_1^4\lambda^2 + 4\sigma_2^4\lambda)}.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. Гл. XVII. С. 639–651.
2. *Новиков А.А.* Последовательное оценивание параметров процессов диффузионного типа // Математические заметки. 1972. Т. 12. Вып. 5. С. 627–638.
3. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: ФАЗИС, 1998. Т. 2. Гл. XVII. С. 820–866.
4. *Емельянова Т.В., Конев В.В.* О последовательном оценивании параметров непрерывной авторегрессии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 5(25). С. 12–25.
5. *Konev V.V., Pergamenschchikov S.M.* Nonparametric estimation in a semimartingale regression model. Part 1. Oracle Inequalities // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2009. No. 3(7).
6. *Konev V.V., Pergamenschchikov S.M.* Nonparametric estimation in a semimartingale regression model. Part 2. Robust asymptotic efficiency // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2009. No. 4(8).
7. *Вальд А.* Последовательный анализ: пер. с англ. / под ред. Б.А. Севастьянова. М.: ГИФМЛ, 1960. 329 с.

---

**Степанова** Евгения Александровна, магистрантка ТГУ; zhenyutka@mail.ru

**Емельянова** Татьяна Вениаминовна, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ ТГУ

# О численном исследовании свойств последовательной оценки параметров авторегрессии

Е.Л. Хабарова, Т.В. Емельянова

*Национальный исследовательский  
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Рассматривается задача оценивания параметров авторегрессионной модели второго порядка с непрерывным временем. Предлагается последовательный план идентификации модели на основе оценок максимального правдоподобия. Для построения плана используется модифицированная выборочная информационная матрица Фишера. Доказывается, что полученные оценки имеют нормальное распределение. Изучены некоторые свойства процедуры оценивания. Численно проиллюстрирован вопрос о длительности процедуры.

**Ключевые слова:** *авторегрессия с непрерывным временем, метод максимального правдоподобия, нормальное распределение, идентификация параметров, последовательное оценивание, момент остановки, численное моделирование.*

## Актуальность и история вопроса

В прикладных исследованиях процессы зачастую описываются стохастическими дифференциальными и стохастическими разностными уравнениями. Эти уравнения в большинстве случаев содержат неизвестные параметры, следовательно, перед их использованием для решения задач необходимо идентифицировать параметры непосредственным оцениванием. Таким образом, оценивание параметров стохастических дифференциальных и разностных уравнений является актуальной задачей современного анализа данных.

Для решения задач оценивания параметров существуют различные эффективные методы (метод максимального правдоподобия, метод моментов, метод наименьших квадратов и другие), однако, в случае зависимых наблюдений эти оценки являются нелинейными функциями, что осложняет процесс исследования их свойств.

В теории идентификации часто предполагают, что процесс имеет неограниченное количество наблюдений. Но в этом случае, для данных небольшого объема предполагается, что выборочные свойства оценок близки к асимптотическим. Такой подход к исследованию оценок для

малого количества данных не всегда является правильным и зачастую приводит к ошибочным выводам.

Одним из методов решения задачи оценивания параметров в неасимптотической постановке является метод последовательного оценивания Липцера и Ширяева [1] для оценки параметра  $\theta$  процесса, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$dX_t = \theta f_t(X_t) dt + dW_t$$

по наблюдениям процессов  $X_t$  и  $f_t$  (здесь  $W_t$  – стандартное броуновское движение).

В своей работе они предложили в оценке максимального правдоподобия

$$\theta_T = \left( \int_0^T f_s^2(X) ds \right)^{-1} \int_0^T f_s(X) dX_s$$

заменить детерминированный промежуток наблюдений  $[0, T]$  на промежуток случайной длины  $[0, \tau(H)]$ , где

$$\tau(H) = \inf \left\{ T > 0 : \int_0^T f_s^2 ds = H \right\},$$

и в качестве оценки неизвестного параметра  $\theta$  использовать последовательную оценку максимального правдоподобия, которая определялась равенством

$$\delta_H(X) = \frac{1}{H} \int_0^{\tau(H)} f_t(X) dX_t.$$

Было доказано, что предложенная в [1] оценка обладает следующими свойствами: она является нормальной, несмещенной и ее среднеквадратическая погрешность не превышает  $\frac{1}{H}$ .

Однако в том случае, когда количество параметров превышает размерность процесса, возникают сложности с построением такого же красивого аналога. Решению этой проблемы посвящено немало работ. В качестве примера можно привести следующие результаты, сделанные в направлении данных исследований:

• Конев и Пергаменщиков смогли построить двухшаговую последовательную процедуру (без учета априорной информации об области параметров) для моделей авторегрессионного типа [2, 3];

• Конев и Емельянова смогли построить более простую процедуру (одноэтапную), но с учетом априорной информации [4].

В практических исследованиях часто возникает неасимптотическая проблема оценивания, когда необходимо определить длину реализации, при которой оценки достигают заданной точности. Для решения задач в неасимптотической постановке требуются методы, которые позволяют контролировать точность оценок при малых объемах данных.

Поскольку в практических задачах объем доступных данных всегда конечен и стоит задача определения качества оценок, вычисленных по наблюдениям на ограниченном временном интервале, то в таких задачах успешно применяется последовательный анализ. Он характеризуется тем, что длительность наблюдений заранее не фиксируется, а определяется по специальным правилам.

Целью нашей работы является построение последовательной оценки максимального правдоподобия с неасимптотическим с нормальным распределением для любых возможных значений параметров двухпараметрической авторегрессионной модели с непрерывным временем и численное исследование некоторых свойств полученной оценки. Провести имитационное моделирование вопроса о длительности процедуры.

### **Постановка задачи.**

#### **Построение последовательной оценки**

Определим задачу оценивания параметров авторегрессионной модели второго порядка по наблюдениям процесса  $X_t$  :

$$d\dot{X}_t = (\theta_1 \dot{X}_t + \theta_2 X_t) dt + dW_t \quad (1)$$

или в векторном виде:

$$d\dot{X}_t = (\theta_1 \quad \theta_2) \begin{pmatrix} \dot{X}_t \\ X_t \end{pmatrix} dt + dW_t,$$

где  $\theta = (\theta_1, \theta_2)'$  – вектор-столбец неизвестных параметров,  $W_t$  – винеровский процесс (здесь штрих обозначает транспонирование).

На промежутке  $[0, T]$  оценка максимального правдоподобия вектора  $\theta$  по наблюдениям процесса (1) представлена в следующем виде:

$$\theta_T^* = M_T^+ \int_0^T (\dot{X}_t, X_t)' dX_t, \quad (2)$$

где

$$M_T = \begin{pmatrix} \int_0^T \dot{X}_s^2 ds & \int_0^T \dot{X}_s X_s ds \\ \int_0^T \dot{X}_s X_s ds & \int_0^T X_s^2 ds \end{pmatrix}$$

– выборочная информационная матрица Фишера,  $M_T^+$  – обратная к  $M_T$  матрица, если она необособленная, и  $M_T^+ = 0$  – иначе.

Построим последовательную оценку максимального правдоподобия с неасимптотическим нормальным распределением для любых возможных параметров.

Для этого введем систему моментов остановки и произведем определенную модификацию выборочной информационной матрицы Фишера.

Для произвольного порога  $h > 0$  введем моменты остановки  $\tau_i(h)$ ,  $i = 0, 1, 2$  по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \tau_0(h) &= 0, \\ \tau_1(h) &= \inf \left\{ T > 0 : \int_0^T \dot{X}_s^2 ds = h \right\}, \\ \tau_2(h) &= \inf \left\{ T > \tau_1(h) : \int_{\tau_1(h)}^T X_s^2 ds = h \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть

$$m(h) = \begin{pmatrix} \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s^2 ds & \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s X_s ds \\ \int_{\tau_1(h)}^{\tau_2(h)} \dot{X}_s X_s ds & \int_{\tau_1(h)}^{\tau_2(h)} X_s^2 ds \end{pmatrix} \quad (4)$$

– модифицированная выборочная информационная матрица Фишера.

Определим вектор  $V(h) = (V_1(h), V_2(h))'$  по формулам

$$V_1(h) = \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s dX_s, \quad V_2(h) = \int_0^{\tau_2(h)} X_s dX_s, \quad (5)$$

а последовательную оценку вектора неизвестных параметров  $\theta$  равенством

$$\theta^* = m^{-1}(h)V(h) \quad (6)$$

или подробнее

$$\begin{pmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s^2 ds & \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s X_s ds \\ \int_0^{\tau_2(h)} \dot{X}_s X_s ds & \int_0^{\tau_2(h)} X_s^2 ds \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s dX_s \\ \int_0^{\tau_2(h)} X_s dX_s \end{pmatrix}.$$

### Основной результат

**Теорема 1. [5]** Пусть задан авторегрессионный процесс второго порядка

$$d\dot{X}_t = (\theta_1 \dot{X}_t + \theta_2 X_t) dt + dW_t.$$

Пусть оценки вектора неизвестных параметров  $\theta = (\theta_1, \theta_2)'$  определяются формулами (3) – (6). Тогда для любого параметра  $\theta \in \mathbb{R}^2$  и порога  $h > 0$

$$\frac{m(h)}{\sqrt{h}} (\theta^*(h) - \theta) \in N(0, I_2),$$

где  $I_2$  – единичная матрица второго порядка.

**Доказательство.** Для доказательства нормальности вектора  $\theta^*$  достаточно показать нормальность любой линейной комбинации его компонент. [5]

Запишем вектор  $V$  поэлементно в следующем виде:

$$V_1(h) = \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s dX_s = \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s \left( \left( \theta_1 \dot{X}_s + \theta_2 X_s \right) ds + dW_s \right) =$$

$$= \int_0^{\tau_1(h)} \left( \theta_1 X_s^2 + \theta_1 X_s X_s \right) ds + \int_0^{\tau_1(h)} X_s dW_s = m(h)\theta_1 + \eta_1(h),$$

$$V_2(h) = m(h)\theta_2 + \eta_2(h),$$

где  $m(h)\theta_i$  –  $i$ -я строка матрицы  $m(h)$ , умноженная на вектор  $\theta$ ,

$$\eta_1(h) = \int_0^{\tau_1(h)} X_s dW_s, \quad \eta_2(h) = \int_{\tau_1(h)}^{\tau_2(h)} X_s dW_s.$$

Пусть теперь

$$\eta(h) = (\eta_1(h), \eta_2(h))',$$

тогда

$$V(h) = m(h)\theta + \eta(h)$$

и  $\eta(h)$  можно представить в следующем виде:

$$\eta(h) = m(h)(\theta^*(h) - \theta).$$

Для доказательства того, что вектор  $\frac{\eta(h)}{\sqrt{h}}$  имеет двумерное нормальное распределение с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей, достаточно показать, что для любого  $\lambda = (\lambda_1 \quad \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  характеристическая функция случайной величины

$$\zeta(h) = \frac{\lambda' \eta(h)}{\sqrt{h}} = \frac{\lambda_1 \eta_1(h)}{\sqrt{h}} + \frac{\lambda_2 \eta_2(h)}{\sqrt{h}}$$

будет иметь вид

$$\varphi_{\zeta(h)}(u) = \mathbb{E} e^{iu\zeta(h)} = e^{-\frac{\lambda' \lambda u^2}{2}}.$$

Вычисляя повторные условные математические ожидания и учитывая, что [1]

$$\mathbb{E} \left( e^{iu \frac{\lambda_j \eta_j(h)}{\sqrt{h}}} / \mathbb{F}_{\tau_{j-1}} \right) = e^{-\frac{\lambda_j^2 u^2}{2}},$$

будем иметь

$$\begin{aligned}
E e^{iu\zeta(h)} &= E e^{iu\left(\frac{\lambda_1\eta_1(h)}{\sqrt{h}} + \frac{\lambda_2\eta_2(h)}{\sqrt{h}}\right)} = E \left( e^{iu\frac{\lambda_1\eta_1(h)}{\sqrt{h}}} \cdot e^{iu\frac{\lambda_2\eta_2(h)}{\sqrt{h}}} \right) = \\
&= E \left( E \left( e^{iu\frac{\lambda_1\eta_1(h)}{\sqrt{h}}} / F_0 \right) \right) \cdot E \left( E \left( e^{iu\frac{\lambda_2\eta_2(h)}{\sqrt{h}}} / F_{\tau_1} \right) \right) = \\
&= E e^{-\frac{\lambda_1^2 u^2}{2}} \cdot E e^{-\frac{\lambda_2^2 u^2}{2}} = e^{-\left(\frac{\lambda_1^2 u^2}{2} + \frac{\lambda_2^2 u^2}{2}\right)} = e^{-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \frac{u^2}{2}} = e^{-\frac{\lambda' \lambda u^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что вектор

$$\frac{m(h)}{\sqrt{h}}(\theta^*(h) - \theta)$$

имеет двумерное нормальное распределение с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей. ■

Итак, была построена последовательная оценка максимального правдоподобия с нормальным распределением для любых возможных параметров двухпараметрической авторегрессионной модели с непрерывным временем.

Известное распределение полученной оценки позволяет контролировать ее среднеквадратическую точность за счет выбора порога процедуры, а также строить доверительные области для оцениваемых параметров. Полученный результат, видимо, допускает обобщение на модели регрессионного типа с произвольным количеством параметров.

### Численное исследование свойств процедуры

Далее изучим вопрос о длительности этой процедуры оценивания. Теоретических подходов пока не возникло – это одно из направлений дальнейшей работы.

Проиллюстрируем результаты исследований с помощью численного моделирования [6].

Будем моделировать процесс, заданный уравнением

$$d\dot{X}_t = (\theta_1 \dot{X}_t + \theta_2 X_t) dt + dW_t.$$

Для этого перейдем от дифференциального уравнения к разностному.

$$\begin{aligned}
d\dot{X}_t &= (\theta_1 \dot{X}_t + \theta_2 X_t) dt + dW_t = \\
&= \theta_1 \frac{dX_t}{dt} dt + \theta_2 X_t dt + dW_t = \theta_1 dX_t + \theta_2 X_t dt + dW_t.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\dot{X}_{t_k} - \dot{X}_{t_{k-1}} = \theta_1 (X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + \theta_2 X_{t_k} \Delta t + W_{t_k} - W_{t_{k-1}},$$

где

$$W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \in N(0, \Delta t), \quad \Delta t = t_k - t_{k-1};$$

$$\dot{X}_{t_k} - \dot{X}_{t_{k-1}} = \theta_1 (X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + \theta_2 X_{t_k} \Delta t + \sqrt{\Delta t} \xi_k, \quad \text{где } \xi_k \in N(0, 1).$$

$$\dot{X}_t = \frac{dX_t}{dt}, \quad \dot{X}_{t_k} = \frac{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}{\Delta t}, \quad \dot{X}_{t_{k-1}} = \frac{X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}}}{\Delta t}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} X_{t_k} - X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-1}} + X_{t_{k-2}} &= \\ &= \theta_1 X_{t_k} \Delta t - \theta_1 X_{t_{k-1}} \Delta t + \theta_2 X_{t_k} (\Delta t)^2 + (\Delta t)^{\frac{3}{2}} \xi_k; \end{aligned}$$

$$X_{t_k} - \theta_1 X_{t_k} \Delta t - \theta_2 X_{t_k} (\Delta t)^2 = 2X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}} - \theta_1 X_{t_{k-1}} \Delta t + (\Delta t)^{\frac{3}{2}} \xi_k;$$

$$X_{t_k} = \frac{1}{1 - \theta_1 \Delta t - \theta_2 (\Delta t)^2} \left[ X_{t_{k-1}} (2 - \theta_1 \Delta t) - X_{t_{k-2}} + (\Delta t)^{\frac{3}{2}} \xi_k \right].$$

Для моделирования моментов остановки заменим интеграл квадратурной суммой [6].

Тогда для

$$\tau_1(h) = \inf \left\{ T > 0 : \int_0^T \dot{X}_s^2 ds = h \right\},$$

$$\tau_2(h) = \inf \left\{ T > \tau_1(h) : \int_{\tau_1(h)}^T X_s^2 ds = h \right\}$$

имеем

$$\tau_1(h) = \min \left\{ i > 0 : \Delta t \sum_{k=1}^i \dot{X}_{t_k}^2 \geq h \right\}, \quad \Delta t = \frac{T}{i};$$

$$\tau_2(h) = \min \left\{ j > \tau_1(h) : \Delta t \sum_{k=\tau_1(h)+1}^j X_{t_k}^2 \geq h \right\}, \quad \Delta t = \frac{T - \tau_1(h)}{j - \tau_1(h)}.$$

Моделирование реализовывалось при следующих значениях: шаг дискретизации  $\Delta t = 0.01$ ,  $X_0 = 0$ , объем выборки  $N = 10000000$ , истинные значения оцениваемых параметров  $\theta_1 = -0.3$ ,  $\theta_2 = -0.5$ . Оценки вычисляются при каждом  $h$  из  $N_h = 5000$  значений с начальным значением  $h_0 = 0.1$  и шагом  $\Delta h = 0.1$ .

Ниже приведены графики зависимости значений моментов остановки  $\tau_1(h)$  и  $\tau_2(h)$  от значений порога  $h$ , а также графики  $\tau_1(h)/h$  и  $\tau_2(h)/h$ , показывающие стабилизацию длительности процедуры с увеличением порога  $h$ .

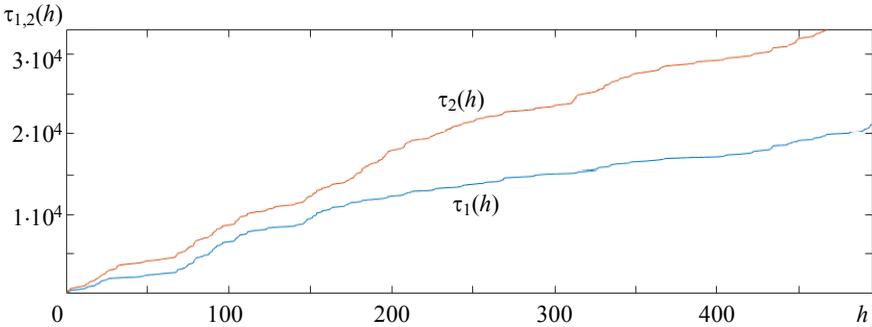


Рис. 1. Моменты остановки  $\tau_1(h)$  и  $\tau_2(h)$  для каждого значения порога  $h$

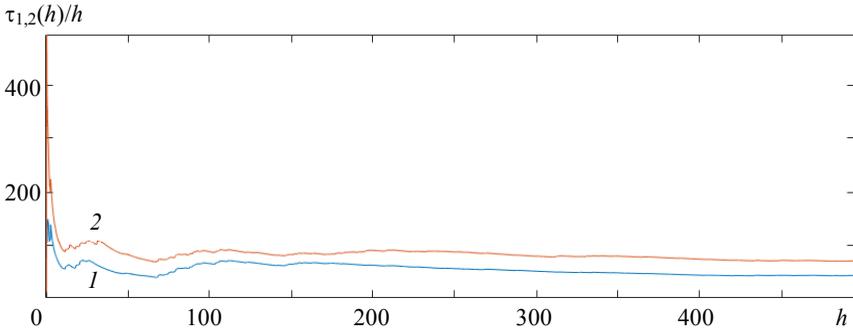


Рис. 2. Стабилизация значений  $\frac{\tau_1(h)}{h}$  (кр. 1) и  $\frac{\tau_2(h)}{h}$  (кр. 2)

Видно, что с увеличением порога  $h$  значения  $\tau_i(h)/h$ ,  $i=1,2$ , стабилизируются. Численное исследование показывает, что зависимость длительности процедуры от порога  $h$ , скорее всего, линейна. Теоретические исследования этого вопроса продолжаются.

### Заключение

Описана новая последовательная процедура, позволяющая получить оценки параметров авторегрессионной модели второго порядка, имеющие нормальное распределение. Это позволяет строить доверительные области с достаточно большой точностью. Процедура предполагает некоторую модификацию выборочной информационной матрицы Фишера, а также введение двух моментов останковки, построенных по этой матрице. Изучено одно из свойств оценок неизвестных параметров авторегрессионной модели второго порядка. Представлено численное подтверждение изученного свойства.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Литцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
2. *Конев В.В., Пергаменщиков С.М.* Гарантированное оценивание периодического сигнала на фоне авторегрессионных помех с неизвестными параметрами // Проблемы передачи информации. 1997. Т. 33. Вып. 4. С. 26–44.
3. *Конев В.В., Пергаменщиков С.М.* О последовательном оценивании параметров случайных процессов диффузионного типа // Проблемы передачи информации. 1985. Т. 21. Вып. 1. С. 48–61.
4. *Емельянова Т.В., Конев В.В.* О последовательном оценивании параметров непрерывной авторегрессии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 5(25). С. 12–25.
5. *Хабарова Е.Л., Емельянова Т.В.* О последовательном оценивании параметров авторегрессионной модели с непрерывным временем // Всероссийская молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Все грани математики и механики» (23–27 апреля 2019 г.): сб. статей. Томск, 2019. С. 189–197.
6. *Seydel R.* Tools for computational finance. Springer, 2017.
7. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980. 576 с.
8. *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит; Лаборатория Базовых Знаний, 2003. 400 с.

**Хабарова** Елена Леонидовна, студентка ММФ ТГУ; el\_khabarova@mail.ru

**Емельянова** Татьяна Вениаминовна, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ ТГУ

# Моделирование течения теплоносителя в системах охлаждения на примере течения охлаждающей жидкости в круглой цилиндрической трубе

М.Д. Хильчук, Е.А. Тарасов

*Национальный исследовательский  
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

В современной вычислительной технике задачи охлаждения высокопроизводительных систем с целью поддержания рабочего диапазона температур процессора и других нагреваемых элементов является важной технической задачей. В настоящее время с прогрессом в вычислительной технике и увеличением ее мощностей задача эффективного отвода тепла имеет важное значение. Наиболее часто в современных ПК применяются жидкостное и воздушное охлаждение. Жидкостное по сравнению в воздушным имеет несколько преимуществ, таких, как большая эффективность охлаждения и более тихая работа системы в целом.



Рис. 1. Жидкостная система охлаждения системного блока ПК

Принцип работы жидкостной системы охлаждения состоит в передаче тепла от нагревающегося элемента к охлаждающему радиатору. Это происходит при помощи рабочей жидкости, которая циркулирует в системе по трубам. В ходе создания системы жидкостного охлаждения важно теоретически рассчитать основные параметры подобной системы: тип теплоносителя, геометрию системы и т.д. Для этого важно построить математическую модель такой системы с учетом всех её особенностей, влияющих на теплоперенос, а также гидродинамических и теплофизических свойств выбранного теплоносителя. В классической гидродинамике подобные задачи сводятся к решению уравнения Навье – Стокса с некоторыми дополнительными уравнениями. Уравнения Навье – Стокса представлены ниже:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \bar{v} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \bar{v} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

(черточки над буквами означают, что соответствующие величины являются размерными) [3].

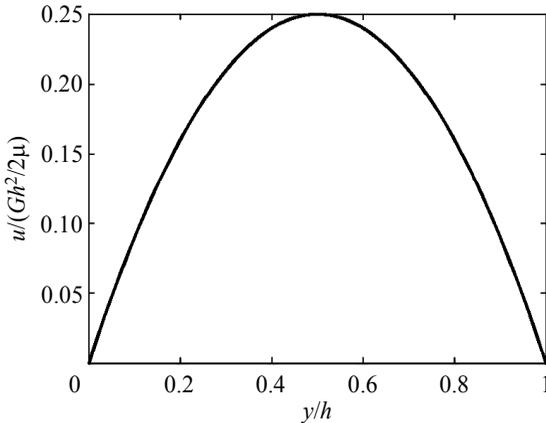


Рис. 2. Классический вид плоскопараллельного течения Пуазейля

Уравнения записаны для физических переменных – составляющих скорости и давления, свойства жидкости характеризуются плотностью и кинематическим коэффициентом вязкости. В данной работе рассматривается течение идеальной жидкости в круглой цилиндрической трубе. К решению задачи моделирования такого течения можно подойти двумя способами: аналитически и численно.

В рамках этой работы было получено аналитическое решение для выбранной задачи и начата работа с численной моделью для выбранной системы. Приведены аналитическое решение для данной системы, которое представляет собой течение Пуазейля и численное решение методом SIMPLE.

### Аналитическое решение

Полагая течение ламинарным, скорость жидкости у стенок трубы будет равняться нулю и будет максимальна на оси трубы. Найдем закон распределения скорости от оси трубы вдоль радиуса. Выделим некоторый цилиндрический объем жидкости радиуса  $r$  и длины  $l$ . На основании рассматриваемого цилиндрического объема действуют силы давления, сумма которых равна  $(p_1 - p_2)\pi r^2$  и действует в направлении движения жидкости. Кроме того, на боковую поверхность цилиндра действует сила трения, равная  $\eta |dv/dr| 2\pi r l$ , которая направлена против движения жидкости. Таким образом условие стационарности течения примет вид

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = \eta |dv/dr| 2\pi r l . \quad (1)$$

Учитывая, что  $|dv/dr| = -dv/dr$ , так как скорость уменьшается с возрастанием радиуса, разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C . \quad (2)$$

Константу находим из условия, что скорость на стенке равна нулю:

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2 . \quad (3)$$

Подставляя найденную константу в уравнение (2), получим

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (4)$$

Значение скорости на оси трубы

$$v_0 = v(0) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \quad (5)$$

С учетом этого окончательный закон распределения будет выглядеть так:

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (6)$$

Таким образом, при ламинарном течении скорость изменяется с расстоянием от оси трубы по параболическому закону (рис. 3).

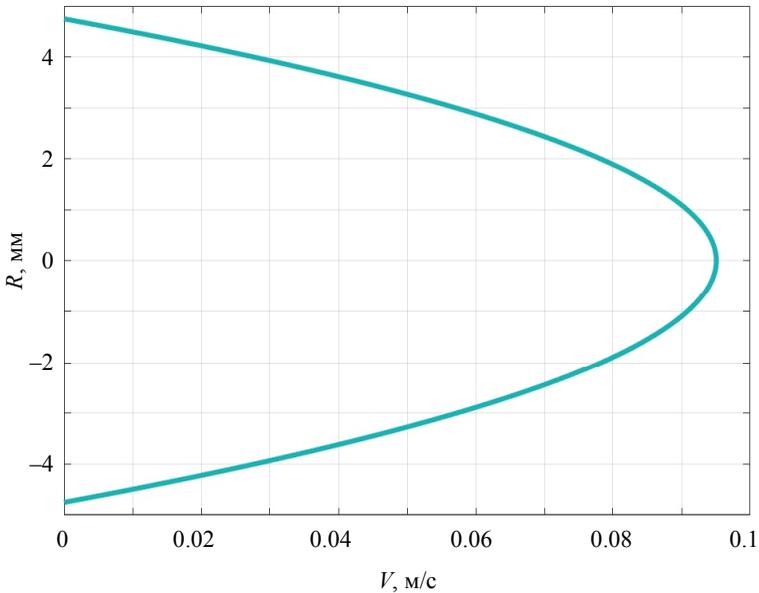


Рис. 3. Параболический профиль течения Пуазейля, полученный в ходе аналитического решения

## Численное решение

Для построения численного решения эквивалентной задачи предполагается использовать итерационно разностную технологию решения уравнений гидродинамики. Она базируется на решении уравнений Навье – Стокса методом, схожим с технологией Патанкара [4], но расчеты будут выполняться на совмещенных сетках. При аппроксимации конвективных членов уравнения использованы разности против потока, а диффузионные члены заменены симметричными разностями. Технология состоит в том, что дискретизация происходит на простых, а не разнесенных сетках, а также в решении алгебраических уравнений способом, основанном на процедуре Зейделя [5].

Данная модель, реализованная руководителем на языке программирования C#, в данный момент рассчитывает ламинарные течения в круглой цилиндрической трубе, результаты данных расчетов вы можете видеть на рис. 4.

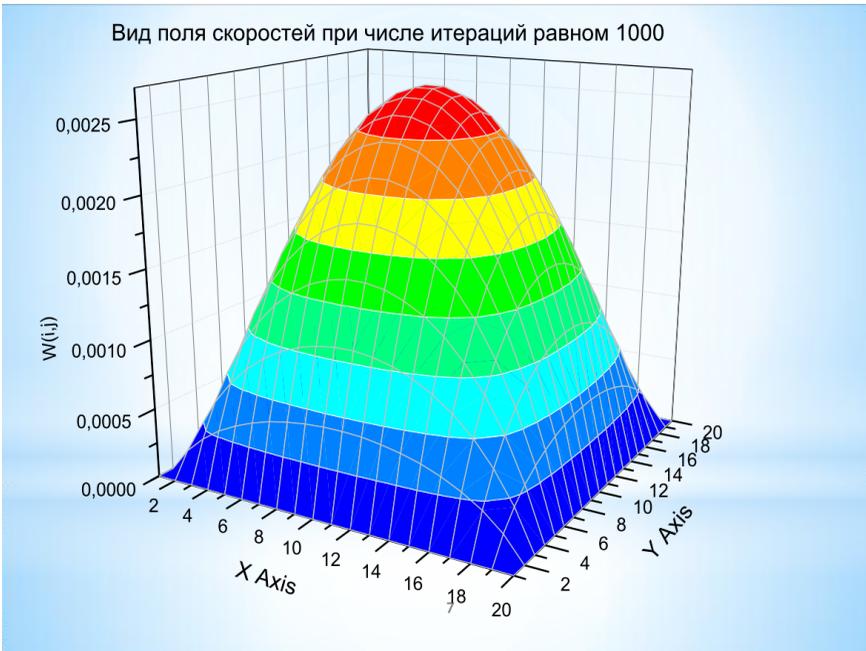


Рис. 4. Профиль течения, полученный в ходе численной реализации математической модели движения жидкости в трубе квадратного сечения

## Выводы и дальнейшие планы работы

В ходе работы с реализованной вычислительной схемой были получены результаты, хорошо согласующиеся с известными в литературе и с полученными автором результатами аналитического решения данной задачи. В дальнейшем планируется улучшение и развитие вычислительной модели и программного комплекса для учета более сложных явлений, таких, как турбулентность, а также построение решения для объектов более сложной геометрии. В перспективе планируется рассмотрение трехмерных задач и переход к созданию моделей теплообмена для сложной системы охлаждения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
2. Емельянов В.Н. Численные методы: введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 2018.
3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 618 с.
4. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
5. Тарасов Е.А., Бубенчиков М.А. Итерационно-разностная технология решения уравнений гидродинамики // Научная конференция студентов и школьников, посвященная 65-летию механико-математического факультета. Томск, 22–25 апреля 2013 г. Томск, 2013. С. 29–30.

---

**Хильчук** Мария Денисовна, студентка ММФ ТГУ; ma6a70@gmail.com

**Тарасов** Егор Александрович, к.ф.-м.н., доцент кафедры теоретической механики ММФ ТГУ; diomedis@mail.ru

# О применении специальной оператор-функции к построению фундаментальных решений абстрактных дифференциальных операторов\*

В.В. Шеметова

*Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,  
г. Иркутск, Россия*

Рассмотрена проблема разрешимости начальной задачи для полных линейных дифференциально-операторных уравнений второго порядка. Исследование проводится с помощью теории обобщенных функций Соболева – Шварца со значениями в банаховых пространствах. Центральное место в работе занимает специальная оператор-функция, получаемая из классической формулы Бейкера – Кемпбелла – Хаусдорфа в некоммутативном гармоническом анализе. Эта оператор-функция содержит коммутаторы операторных коэффициентов уравнения, что позволило ослабить условие их коммутативности. В случае перестановочности операторных коэффициентов получен новый вид фундаментального решения в форме операторно-функционального ряда по гипергеометрической функции Куммера.

**Ключевые слова:** *абстрактное дифференциальное уравнение второго порядка, банахово пространство, коммутатор операторов, обобщенная функция, формула Бейкера – Кемпбелла – Хаусдорфа, фундаментальное решение.*

Дифференциальные уравнения в абстрактных конечномерных и бесконечномерных пространствах представляют интерес для приложений. В частности, они позволяют с общих позиций изучать начально-краевые задачи различных разделов механики сплошных сред. Особо востребованными с этой точки зрения являются так называемые полные уравнения второго порядка [1], поскольку наличие в них слагаемого с первой производной по времени функции состояния процесса дает возможность учитывать такие эффекты, как диссипация энергии, внутреннее трение, воздействие гироскопических сил и другие. Для анализа этих уравнений используют различные подходы: теорию  $M, N$ -функций [2], спектральную теорию квадратичных операторных пучков [3] и

---

\* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (№ 18-01-00643 А), РФФИ и ВАНТ в (№ 20-51-54003 Вьет\_а), а также РФФИ и Правительства Иркутской области (№ 20-41-385002 р\_Наставник).

полиномов [4], в том числе, с необратимым операторным коэффициентом при старшем мономе [4, 5], редукцию к неполным уравнениям второго порядка [6] и системам уравнений первого порядка [1, 3, 7, 8]. В представляемой работе применяется конструкция фундаментального решения [9], найден его вид, отличный от полученного ранее в [6].

### Постановка задачи

Пусть  $E_1$  и  $E_2$  – вещественные банаховы пространства,  $u = u(t)$  и  $f = f(t)$  – неизвестная и заданная функции действительного аргумента, значениями которых являются элементы из  $E_1$  и  $E_2$  соответственно. Введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор

$$D_2(u(t)) = Bu''(t) - A_1u'(t) - A_0u(t),$$

где  $B, A_1, A_0$  – замкнутые линейные операторы, действующие из  $E_1$  в  $E_2$ , причем  $D(B) \subseteq D(A_1) \cap D(A_0)$ . Рассмотрим уравнение вида

$$D_2(u(t)) = f(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u'(0) = u_1, \quad u(0) = u_0. \quad (2)$$

Под *классическим* решением начальной задачи (1), (2) будем понимать функцию  $u(t) \in C(t \geq 0; E_1) \cap C^2(t > 0; E_1)$ , которая обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальным условиям (2).

Начальная задача (1), (2) позволяет с общих позиций рассматривать ряд задач механики сплошных сред. Приведем примеры, в которых обозначим  $\Omega$  область в  $\mathbb{R}^N$  с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ . Одним из примеров начальной задачи (1), (2) является начально-краевая задача

$$(\lambda - \Delta)u_{tt}(t, \bar{x}) - \Delta u_t(t, \bar{x}) + \Delta^2 u(t, \bar{x}) = f(t, \bar{x}), \quad t > 0, \quad \bar{x} \in \Omega,$$

$$u(t, \bar{x})|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \quad u_t(t, \bar{x})|_{t=0} = u_1(\bar{x}), \quad u(t, \bar{x})|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0, \quad \Delta u(t, \bar{x})|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0,$$

которая при  $N = 2$  описывает малые поперечные колебания термоупругой диссипативной пластины с учетом инерции [10], занимающей двумерную область  $\Omega$ . Граничные условия, заданные на  $\partial\Omega$ , называют граничными условиями Навье [11]. Другой пример – начально-краевая задача вида

$$(\lambda' - \Delta)u_{tt}(t, \bar{x}) - \alpha(\Delta - \lambda'')u_t(t, \bar{x}) - \beta(\Delta - \lambda''')u(t, \bar{x}) = f(t, \bar{x}), \quad t > 0, \quad \bar{x} \in \Omega;$$

$$u(t, \bar{x})|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \quad u_t(t, \bar{x})|_{t=0} = u_1(\bar{x}), \quad u(t, \bar{x})|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0.$$

Указанное уравнение в частных производных в современной литературе называют уравнением Буссинеска – Лява [12]. В одномерном случае  $N=1$  оно описывает малые продольные колебания упругого стержня с учетом инерции.

### Метод исследования

К исследованию начальной задачи (1), (2) будем применять теорию обобщенных функций (распределений) Соболева – Шварца со значениями в банаховых пространствах, основные идеи которой изложены в [9].

Пусть  $u = u(t)$  – классическое решение задачи (1), (2). Продолжим его нулем на интервал  $(-\infty; 0)$  следующим образом:  $\tilde{u}(t) = u(t)\theta(t)$ , тогда в классе распределений с ограниченным слева носителем  $K'_+(E_1)$  задача Коши (1), (2) принимает вид сверточного уравнения

$$D_2(\delta(t)) * \tilde{u}(t) = \tilde{g}(t), \quad (3)$$

с правой частью  $\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) + Bu_0\delta'(t) + (Bu_1 - A_1u_0)\delta(t)$ , в которой  $\theta(t)$  – функция Хевисайда;  $\delta(t)$  – функция Дирака. Единственным решением в  $K'_+(E_1)$  (обобщенным решением начальной задачи (1), (2)), является распределение

$$\tilde{u}(t) = \varepsilon(t) * \tilde{g}(t),$$

где обобщенная оператор-функция  $\varepsilon(t)$  удовлетворяет двум условиям

$$\forall v(t) \in K'_+(E_2) \quad D_2(\delta(t)) * \varepsilon(t) * v(t) = v(t);$$

$$\forall w(t) \in K'_+(E_1) \quad \varepsilon(t) * D_2(\delta(t)) * w(t) = w(t)$$

и называется *фундаментальной оператор-функцией* [9] или *фундаментальным решением* дифференциального оператора  $D_2(\delta(t))$ . В силу первого равенства распределение (4) является решением уравнения (3). Существование данного решения следует из существования свертки в выбранном классе распределений. Пусть далее существует  $\tilde{v}(t) \in K'_+(E_1)$ , такое, что  $\tilde{v}(t) \neq \tilde{u}(t)$  и  $D_2(\delta(t)) * \tilde{v}(t) = \tilde{g}(t)$ , тогда, с учетом второго равенства, получим

$$\tilde{v}(t) = \varepsilon(t) * D_2(\delta(t)) * \tilde{v}(t) = \varepsilon(t) * \tilde{g}(t) = \tilde{u}(t),$$

противоречие, доказывающее единственность решения сверточного уравнения (3) в классе  $K'_+(E_1)$ . Из вышесказанного можно сделать вывод, что смысл фундаментальной оператор функции состоит в следующем: если известен его вид, то начальная задача Коши (1), (2) имеет единственное обобщенное решение, для построения которого справедлива формула (4).

### Основные теоремы

Пусть  $B$  и  $A$  – линейные непрерывные операторы, действующие в банаховом пространстве  $E$ . Рассмотрим оператор-функцию

$$V(t) = e^{-At} B e^{At},$$

где  $e^{At}$  – операторная экспонента. По следствию из формулы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа [13] оператор-функция  $V(t)$  представима рядом

$$V(t) = B + [B, A] \frac{t}{1!} + [[B, A], A] \frac{t^2}{2!} + [[[B, A], A], A] \frac{t^3}{3!} + \dots$$

Здесь и далее  $[B, A] = BA - AB$  – коммутатор операторов  $B$  и  $A$ . Заметим, что  $V(0) = B$ , в свою очередь, операторы  $V(t)$  и  $A$  образуют пару Лакса [14], т. е. удовлетворяют уравнению

$$V'(t) = [V(t), A].$$

Введем в рассмотрение последовательность оператор-функций  $U_{k-1}(t)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , заданную рекуррентно

$$U_k(t) = \int_0^t V(s) U_{k-1}(s) ds, \quad U_0(t) = I. \quad (5)$$

Здесь  $I$  – тождественный (единичный) оператор в банаховом пространстве  $E$ . Справедливы дифференциальные соотношения

$$U'_k(t) - [U_k(t), A] = U_{k-1}(t) B,$$

асимптотические формулы

$$U_{k-1}(t) \sim B^{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \quad t \rightarrow 0,$$

и оценки

$$\|U_{k-1}(s)\|_{L(E)} \leq \frac{\|B\|^k T^{k-1} e^{(2k-1)\|A\|T}}{(k-1)!}, \quad t \in [0, T].$$

**Теорема.** Пусть линейный оператор  $B$  непрерывно обратим, тогда фундаментальное решение дифференциального оператора  $D_2(\delta(t))$  имеет следующий вид:

$$\varepsilon(t) = B^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} e^{A_1 B^{-1} s} U_{k-1}(s) ds \theta(t),$$

где оператор-функции  $U_{k-1}(t)$  заданы формулой (5), в которой  $U_0(t) = I_2$ ,  $V(t) = e^{-A_1 B^{-1} t} A_0 B^{-1} e^{A_1 B^{-1} t}$ ,  $I_1$  и  $I_2$  – тождественные операторы в  $E_1$  и  $E_2$  соответственно.

**Доказательство** теоремы сводится к непосредственной проверке определения фундаментального решения. С учетом того, что  $D(B) \subseteq D(A_1) \cap D(A_0)$ , согласно теореме о замкнутом графике, следует, что линейные операторы  $A_0 B^{-1}$  и  $A_1 B^{-1}$  являются ограниченными. Тогда операторно-функциональный ряд, указанный в данной теореме, сходится равномерно на любом компакте  $[0; T]$  в норме банаховой алгебры  $L(E_2)$  в силу неравенств

$$\left\| \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} e^{A_1 B^{-1} s} U_{k-1}(s) ds \right\|_{L(E_2)} \leq \frac{a_0^k T^{2k-1} e^{(2k-1)a_1 T}}{(k-1)! k!}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где  $a_0 = \|A_0 B^{-1}\|_{L(E_2)}$  и  $a_1 = \|A_1 B^{-1}\|_{L(E_2)}$ ,  $t \in [0; T]$ .

**Следствие.** Если операторы  $A_0 B^{-1}$  и  $A_1 B^{-1}$  имеют коммутативную суперпозицию, тогда фундаментальное решение дифференциального оператора  $D_2(\delta(t))$  имеет следующий вид:

$$\varepsilon(t) = B^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} (A_0 B^{-1})^{k-1} {}_1F_1(k; 2k; A_1 B^{-1} t) \theta(t),$$

где  ${}_1F_1(a; b; t)$  – вырожденная гипергеометрическая функция Куммера [15] в интегральной форме

$${}_1F_1(a; b; t) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{t\tau} \tau^{a-1} (1-\tau)^{b-a-1} d\tau, \quad b > a > 0,$$

$\Gamma(a)$  – гамма-функция Эйлера положительного аргумента.

### Заключение

Таким образом, с помощью специальной оператор-функции вида  $V(t) = e^{-At} B e^{At}$  построено фундаментальное решение дифференциального оператора второго порядка в банаховых пространствах. Предлагаемый подход применим к объектам другой природы, а именно к дифференциально-операторным уравнениям с отклоняющимся аргументом [16, 17]. Отметим, что описанная методика допускает обобщение на произвольный высокий порядок абстрактного линейного дифференциального оператора [18].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fattorini H.O.* Second order linear differential equations in Banach spaces. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1985. 314 p.
2. *Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Физматлит, 1995. 176 с.
3. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989. 416 с.
4. *Булатов. М.В., Рахвалов Н.П., Та Зуи Фьонг.* О методе матричной прогонки для одного класса дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2011. Т. 4. С. 2–11.
5. *Замышляева А.А.* Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8. № 4. С. 45–54.
6. *Гражданцева Е.Ю.* Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных операторов высокого порядка в банаховых пространствах. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. 91 с.
7. *Федоров В.Е.* Один класс уравнений соболевского типа второго порядка и вырожденные группы операторов // Вестник Челябинского государственного университета. 2011. № 13. С. 59–75.
8. *Baskalov A.G., Katsaran T.K., Smagina T.I.* Second-order linear differential equations in a Banach space and splitting operators // Russian Math. 2017. V. 61. No. 10. P. 32–43.
9. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. 548 p.

10. *Bisognin E., Bisognin V., Perla Menzala G., Zuazua E.* On exponential stability for von Karman equations in the presence of thermal effects // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 1998. V. 21. P. 393–416.
11. *Musina R., Nazarov A.I.* On fractional Laplacians // *Communications in partial differential equations*. 2014. V. 39. No. 9. P. 1780–1790.
12. *Zamyshlyayeva A.A., Bychkov E.V., Tsyplenkova O.N.* Mathematical models based on Boussinesq–Love equation // *Applied Mathematical Sciences*. 2014. V. 8. No. 110. P. 5477–5483.
13. *Hall B.C.* Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction. New York: Springer, 2015. 453 p.
14. *Абловиц Д., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М.: Мир, 1987. 479 p.
15. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды: в 3 т. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы. М.: Физматлит, 2003. 688 с.
16. *Шеметова В.В.* Применение теории распределений к дифференциально-операторным уравнениям с запаздыванием // *ИТНОУ: Информационные технологии в науке, образовании и управлении*. 2018. № 5 (9). С. 70–76.
17. *Орлов С.С., Шеметова В.В.* Разрешимость в классе распределений дифференциально-операторного уравнения с отклоняющимся аргументом // *Материалы 19-й Международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения»*. Саратов, 2018. С. 220–223.
18. *Орлов С.С., Шеметова В.В.* Построение решений в классе распределений дифференциально-операторных уравнений высших порядков // *Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019 «XXX крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам»*. Симферополь, 2019. С. 190–192.

---

**Шеметова** Валентина Владимировна, студентка ИГУ; valentina501@mail.ru

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

*Научное издание*

**ВСЕ ГРАНИ МАТЕМАТИКИ  
И МЕХАНИКИ**

**Сборник статей  
Всероссийской молодежной  
научной конференции  
(Томск, 12–15 мая 2020 г.)**

Редактор *Т.С. Портнова*

Дизайн, верстка *Д.В. Фортеса*

**ООО «Издательство научно-технической литературы»**  
634050, Томск, ул. Студенческая, 4, тел. (3822) 53-10-35

---

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 07.07.2020.  
Формат 60 × 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Усл. п. л. 8.14. Уч.-изд. л. 9.11. Тираж 100 экз. Заказ № 16

---